FIZIKA - Termodinamika, optika, atomska i nuklearna fizika


Dijana Dujak
University of Sarajevo


Maja Đekić
University of Sarajevo

FIZIKA

TERMODINAMIKA, OPTIKA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

Dijana Dujak
Maja Đekić

FIZIKA

Termodinamika, optika, atomska i nuklearna fizika

Dijana Dujak

Maja Đekić

FIZIKA
Termodinamika, optika, atomska i nuklearna fizika
Autorice:
doc. dr. Dijana Dujak i doc. dr. Maja Đekić
Recenzenti:
prof. dr. Izet Gazdić,
vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli
doc. dr. Amra Salčinović Fetić,
docentica Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu
Izdavač:
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
Adresa izdavača:
Zmaja od Bosne 33-35, Sarajevo
Godina izdanja:
2021
Izdanje:
elektronsko

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

53(075.8)

DUJAK, Dijana
Fizika [Elektronski izvor] : termodinamika, optika, atomska i nuklearna fizika /Dijana Dujak, Maja Đekić. - El. knjiga. - Sarajevo : Prirodno-matematički fakultet Univerziteta, 2021

Način pristupa (URL): http://fizika.pmf.unsa.ba/wp-content/uploads/2021/06/Fizika_cijela-knjiga-compressed.pdf. - Nasl. sa nasl. ekrana. - Opis izvora dana 18. 6. 2021.

ISBN 978-9926-453-34-3

1. Đekić, Maja

COBISS.BH-ID 44563206

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namijenjen je studentima Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu, jer u potpunosti prati plan i program predmeta Inženjerska fizika 2. Također ga mogu koristiti i studenti drugih tehničkih fakulteta koji u okviru predmeta opšte fizike izučavaju termodinamiku, optiku, atomsku i nuklearnu fiziku.

Knjiga se sastoji od šest poglavlja i to: 1. Termodinamika i molekularno-kinetička teorija, 2. Optika, 3. Kvantna priroda svjetlosti, 4. Potvrde kvantne prirode svjetlosti, 5. Modeli atoma i 6. Fizika atomske jezgre. U prvom poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi molekularno-kinetičke teorije i termodinamike koji su korišteni u opisivanju stanja idealnog gasa, gasnih procesa, transportnih pojava i principa termodinamike. Poglavlje koje se odnosi na optiku započinje kratkim pregledom fotometrijskih veličina. Zatim su detaljno razrađeni zakoni geometrijske optike, njihova primjena na ogledalima i sočivima, kao i njihove posljedice u smislu prividne dubine, totalne refleksije i sl. U dijelu Fizička optika razmatrane su pojave koje su posljedica talasne prirode svjetlosti, tj. interferencija, difrakcija i polarizacija svjetlosti. U trećem poglavlju se, kroz objašnjenje toplotnog zračenja apsolutno crnog tijela, uvodi pojam fotona - kvanta energije. Eksperimentalne potvrde kvantne prirode svjetlosti objašnjene su u četvrtom poglavlju. U poglavlju Modeli atoma objašnjeni su rani modeli atoma sa detaljnim opisom Borovog modela, a zatim su navedene osnovne postavke kvantno-mehaničkog modela i kvantni brojevi. Posljednje poglavlje objašnjava strukturu jezgre, energiju veze i radioaktivne raspade. Na kraju je dato objašnjenje procesa fisije i fuzije.

Autorice

Sadržaj

Poglavlje 1

Termodinamika i molekularno-kinetička teorija

U sistemima s velikim brojem čestica, koje se haotično kreću, javljaju se toplotne pojave. Za njihovo izučavanje koriste se dvije metode i to molekularno-kinetička i termodinamička.

Molekularno kinetička teorija (MKT) makroskopska svojstva supstance, kao što su pritisak, zapremina, temperatura i sl. objašnjava međudjelovanjem čestica (atoma, molekula) te supstance. Koristi se metodama statističke fizike koje se ogledaju u tome da se uzimaju samo srednje vrijednosti veličina koje karakterišu kretanje čestica, umjesto da se razmatra kretanje svake pojedinačne čestice. Razlog tome je što, ma koliko mali bio uzorak supstance koja se proučava, u njemu se nalazi ogroman broj čestica. Npr. U $1\,\mathrm{cm}^3$ gasa pri normalnim uslovima nalazi se $2,7 \cdot 10^{19}$ čestica – **Lošmitov broj** (austrijski naučnik Josef Loschmidt). Pojave u kojima učestvuje ogroman broj čestica potčinjavaju se zakonima statističke fizike. Jedna od statističkih metoda, koja se koristi u MKT je upravo ta da postoji određena kvantitativna veza između svojstava mnoštva čestica i srednjih vrijednosti onih fizikalnih veličina koje karakterišu ponašanje i svojstva svake čestice. Na primjer, srednja kinetička energija jedne čestice gasa, proporcionalna je apsolutnoj temperaturi, a koja je svojstvo mnoštva čestica (o tome će biti riječi kasnije).

Termodinamika proučava ista makroskopska svojstva supstance kao i MKT, ali bez uvida u molekularnu strukturu i molekularno-kinetčki mehanizam odgovarajućih pojava. Termodinamičke metode su jednostavnije u poređenju s MKT, ali one samo opisuju kako teče neki proces, bez obrazloženja zašto tako teče. Termodinamika se zasniva na nekoliko fundamentalin zakona koji se nazivaju *principi (zakoni) termodinamike*. MKT i termodinamika primjenjene zajedno daju potpuniju sliku jedne te iste pojave međusobno se dopunjavajući.

1.1 Osnovni pojmovi

1.1.1 Osnovni pojmovi MKT

Prema MKT suspstanca se sastoji od ogromnog broja čestica, koje se neprestano kreću, ali njihovo kretanje ne dovodi do pomjeranja centra mase sistema

u cjelini. Pod pojmom čestica podrazumijevamo osnovne elemente od kojih je građena supstanca, a to mogu biti atomi, molekule ili joni (MKT ne razmatra građu samog atoma). Pomenute čestice imaju veoma malu masu, reda veličine 10^{-25} kg, te se zbog toga uvodi nova jedinica koja se naziva **atomska jedinica mase** i jednaka je jednoj dvanaestini mase atoma izotopa ugljika C_6^{12}:

$$1\,\mathrm{ajm} = 1\,\mathrm{u} = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}. \tag{1.1}$$

Odnos mase atoma i atomske jedinice mase naziva se **relativna atomska masa**:

$$A_r = \frac{m_a}{u} \Rightarrow m_a = A_r u, \tag{1.2}$$

dok je odnos mase molekule i atomske jedinice mase **relativna molekularna masa**:

$$M_r = \frac{m_m}{u} \Rightarrow m_m = M_r u. \tag{1.3}$$

Broj čestica u nekoj supstanci određuje veličina koja se naziva **količina supstance**. Ona je jedna od sedam osnovnih veličina u SI, a njena jedinica je **mol**. **Mol** je količina tvari koja sadrži tačno $6,02214076 \cdot 10^{23}$ gradivnih jedinica (međusobno identičnih čestica - atoma, molekula, elektrona, protona, iona, itd.). Možemo reći da je količina tvari nekog sistema mjera broja njegovih gradivnih jedinica. Ovaj broj je fiksna numerička vrijednost Avogadrove konstante, N_A, kad je izražena u jedinicama mol^{-1} i naziva se **Avogadrov broj**:

$$N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \approx 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}. \tag{1.4}$$

Ova definicija je usvojena 2019. g. Ranija definicija je povezivala mol s kilogramom pri čemu je mol bio definisan kao količina tvari koja sadrži onoliki broj međusobno identičnih čestica (atoma, elektrona, protona, iona, itd.) koliko ima atoma u $0,012$ kg čistog ugljika C_6^{12}. Posljedica nove definicije je ta da masa jednog mola C_6^{12} nije više tačno $0,0012$ kg. Masa jednog mola supstance naziva se **molarna masa** te supstance i jednaka je proizvodu mase molekule i Avogadrove konstante

$$M = m_m N_A, \tag{1.5}$$

odnosno nakon uvrštavanja izraza za relativnu molekularnu masu:

$$M = M_r u N_A = M_r \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1},$$

$$M = M_r \cdot 0,001\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} = M_r \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}. \tag{1.6}$$

Napomena: iz ranije definicije mola količnik molarne mase gradivne jedinice i njene relativne mase je 1 g/mol, ali ako se uzme nova definicija mola taj odnos iznosi $0,99999999965(30)$ g/mol. S obzirom da je to odstupanje veoma malo, neznatno je za praktične svrhe.

Iz gore navedenog možemo zaključiti da se količina neke tvari n može odrediti iz mase tvari m ili iz broja čestica te tvari N:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \tag{1.7}$$

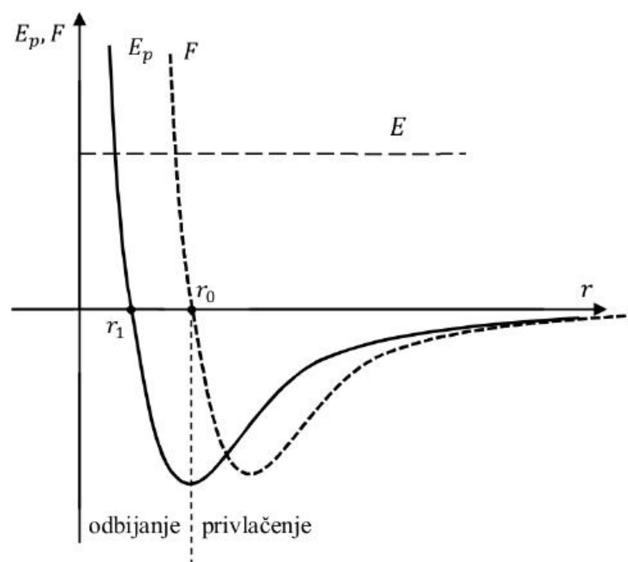
1.1.2 Osnovni pojmovi termodinamike

Pod **termodinamičkim sistemom** podrazumijevamo proizvoljno makroskopsko tijelo ili skup tijela, čije su dimenzije velike u poređenju sa atomskim razmjerama i koje se sastoji od ogromnog broja čestica u neprestanom kretanju. Tijelo u kojem se čestice kreću brže osjećamo kao *toplije*, a tijelo u kojem se čestice kreću sporije osjećamo kao *hladnije*. Da bi ti osjećaji mogli kvantitativno da se procijene, uvodi se pojam **temperature**, koja je u SI jedna od sedam osnovnih veličina. Pored temperature koriste se i drugi parametri sistema, koji se mogu makroskopski opažati i mjeriti, a koji se mijenjaju s promjenom temperature. Ti parametri se nazivaju **termodinamički paramteri** i oni opisuju svojstva sistema kao cjeline (temperatura, pritisak, zapremina, električni otpor, provodljivost itd.) Broj parametara, koji određuju toplotno stanje sistema, zavisi od vrste sistema i vanjskih utjecaja. Najjednostavniji sistem je onaj koji može da se opiše samo s tri paramtera (pritisak, zapremina i temperatura), kao na primjer idealan gas.

Pored gore navedenih pojmova potrebno je još definisati pojam **toplotne (termodinamičke) ravnoteže**. To je naročita forma toplotnog kretanja, pri kojoj makroskopski parametri sistema ostaju u prosjeku vremenske konstante. Drugim riječima, to je takvo toplotno kretanje čestica nekog sistema, pri kojem se srednje vrijednosti makroskopskih parametara sistema ne mijenjaju u toku vremena. Definicija i mjerenje temperature zasniva se upravo na pojavi toplotne ravnoteže.

1.1.3 Molekularne sile i agregatna stanja

Pomoću MKT moguće je shvatanje građe suspstance u različitim agregatnim stanjima. Prema ovoj teoriji čestice djeluju jedna na drugu silama koje se nazivaju **molekularne sile**. One se dijele na **kohezione** i **adhezione**. Kohezione sile su sile koje djeluju između jednakih čestica, a adhezione one koje djeluju između različitih čestica. Molekularne sile mogu biti i privlačne i odbojne, a njihovo porijeklo je elektromagnetne prirode. Njihovo postojanje možemo primijetiti ukoliko želimo sabiti neko čvrsto tijelo ili ga rastegnuti. U prvom slučaju se osjeća utjecaj odbojnih sila, a u drugom privlačnih. Eksperimenti pokazuju da molekularne sile djeluju na malim rastojanjima, tj. da vrlo brzo opadaju sa povećanjem rastojanja između čestica. Privlačne i odbojne molekularne sile uvijek djeluju istovremeno, ali kao što je već rečeno njihov intenzitet zavisi od rastojanja između čestica. Na slici 1.1 je prikazan grafik zavisnosti potencijalne energije veze i rezultujuće sile između dvije čestice u zavisnosti od njihovog međusobnog rastojanja. Rezultujuća sila je suma privlačnih i odbojnih sila koje istovremeno djeluju između čestica. Kad se molekule nalaze na velikom rastojanju ($r \gg r_0$) i privlačna i odbojna sila su beskonačno male, kao da molekularne sile ne djeluju, te potencijalna energija veze teži nuli. Pri približavanju rastu i privlačna i odbojna sila, ali različitim brzinama. Pokazuje se da na malim rastojanjima dominira odbojna sila, a na većim rastojanjima privlačna. Na rastojanju $r = r_0$ privlačna i odbojna sila su jednake tj. rezultujuća sila je jednaka nuli, odnosno potencijalna energija je minimalna (i negativna). S obzirom da je sistem izolovan, smanjenje potencijalne energije je praćeno porastom kinetičke energije, te je na rastojanju r_0 kinetička energija maksimalna. Na rastojanjima manjim od r_0 odbojna sila naglo raste, a potencijalna energija najprije nastavlja



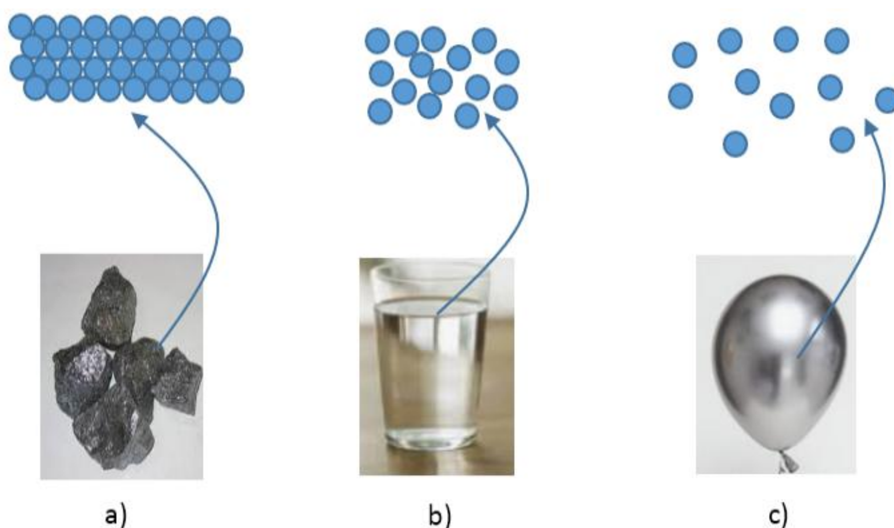
Slika 1.1. *Zavisnost potencijalne energije veze (puna linija) i rezultujuće sile između dvije čestice (isprekidana linija) od njihovog međusobnog rastojanja. Isprekidanom horizontalnom linijom je označena ukupna energija.*

da bude negativna, a zatim mijenja predznak, naglo rastući. U oblast $r < r_1$ molekula ne može da prodre jer bi pri tome pozitivna energija međudjelovanja bila veća od ukupne ($E_p > E$), što bi značilo da kinetička energija mora biti negativna, što je nemoguće. Minimalno rastojanje r_1, na koje se mogu približiti centri čestica naziva se **efektivni dijametar čestice**. Dakle, na rastojanju r_1 molekula se zaustavlja utrošivši svu kinetičku energiju, te se pod uticajem odbojne sile kreće u suprotnom smjeru povećavajući brzinu. Kad pređe rastojanje r_0 čestica počinje da usporava i pri $r \to \infty$ ona poprima početnu vrijednost kinetičke energije. Što je viša temperatura to je veća početna vrijednost kinetičke energije čestice, koja joj omogućava da se približi drugoj čestici na manje rastojanje.

U *čvrstom agregatnom stanju* gradivne čestice su poredane blizu jedna druge (slika 1.2), pa dolaze do izražaja privlačne sile koje ih povezuju, pri čemu se formiraju kristali. Ukoliko čestice nemaju pravilan raspored, takve supstance se nazivaju amorfne. Amorfno stanje je metastabilno, jer čestice teže pravilnom uređenju, te nakon izvjesnog vremena poprimaju kristalnu strukturu. Kod *tečnog agregatnog stanja* molekule su također raspoređene jedna uz drugu, ali je taj raspored nepravilan, a čestice su slabije vezane nego kod čvrstih tijela. U *gasovitom stanju* čestice se nalaze na mnogo većem međusobnom rastojanju i kreću se velikim brzinama. Slabe privlačne sile ne mogu da ih drže na okupu pa se zbog toga gasovi mogu širiti u prostoru ne zadržavajući stalni oblik i zapreminu.

1.1.4 Temperatura

Čestice od kojih su građena sva tijela u priprodi, neprestano se kreću, pri čemu se to kretanje naziva *toplotno kretanje*. Ukoliko se dva tijela dovedu u kontakt, njihove čestice će se međusobno sudarati i predavati energiju jedna drugoj. Čes-



Slika 1.2. *Na slici su prikazana tri agregatna stanja supstance te slikoviti prikaz rasporeda čestica u svakom od njih: a) čvrsto stanje, b) tečno stanje i c) gasovito stanje.*

tice, koje su se kretale brže, će se nakon sudara kretati sporije, a čestice koje su se kretale sporije, će se ubrzati. To znači da pri dodiru dva tijela dolazi do razmjene energije, pri čemu je tijelo, koje gubi energiju, ono čije su se čestice kretale brže i naziva se *toplije tijelo*, a tijelo koje prima energiju je tijelo čije su se čestice kretale sporije i naziva se *hladnije tijelo*. Taj prelaz energije će se dešavati sve dok se ne uspostavi stanje *termodinamičke ravnoteže*. Onda kažemo da su oba tijela na istom stepenu zagrijanosti. Kao karakteristika stepena zagrijanosti tijela služi **temperatura**. Temperatura je dakle termodinamička veličina koja krakteriše stanje termodinamičke ravnoteže makroskopskog sistema. Temperatura se na početku definisala kao 2/3 kinetičke energije translatornog kretanja čestica i nazivana je *energetska ili kinematička temperatura* (jer se izražavala se u džulima)

$$\Theta = \frac{2}{3}\overline{E}_k. \tag{1.8}$$

To nije bilo praktično, jer bi mjerenje temperature značilo mjerenje energije svake čestice. Zbog toga je uvedena nova jedinica za temperaturu, koja je nazivana *stepen*. Temperatura izražena u stepenima se označava s T, i njena definicija glasi

$$kT = \frac{2}{3}\overline{E}_k, \tag{1.9}$$

gdje je k **Bolcmanova konstanta** (Boltzmann), koja je određena eksperimentalno i iznosi $1,3806 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{stepen}}$. Pošto je kinetička energija pozitivna veličina, i temperatura mora biti pozitivna veličina. Ovako definisana temperaturna skala se naziva *apsolutnom* odnosno *Kelvinovom*, te se stepeni te skale označavaju s K (britanski naučnik William Thomson, 1st Baron Kelvin). Ova skala počinje od apsolutne nule, a to je temperatura na kojoj prestaje svako toplotno kretanje. Apsolutna temperatura je uzeta za jednu od osnovnih veličina u SI, a

odgovarajuća jedinica se naziva *Kelvin*. Prema ranijoj definiciji (prije 2019. g.) kelvin je bio definisan kao $\frac{1}{273,16}$ dio termodinamičke temperature trojne tačke vode. Međutim 2019. g. kelvin je definisan preko Plankove konstante, brzine svjetlosti i frekvencije (prelaza osnovnog stanja) atoma cezijuma-133, koju ovdje nećemo navoditi.

Kod nas je uobičajeno je da se temperatura izražava u stepenima Celzijusa (°C) (švedski naučnik Andres Celsius). Nula stepeni celzijusa je temperatura mržnjenja vode, dok apsolutna nula (0K) odgovara temperaturi od $-273,15\,^\circ$C. Veza između Kelvinove (apsolutne) temperature T i Celzijusove temperature t je

$$T = t + 273,15\,^\circ\mathrm{C}. \tag{1.10}$$

Bitno je uočiti da je temperaturni interval u kelvinima jednak temperaturnom intervalu u celzijusima jer je:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = t_2 + 273,15\,^\circ\mathrm{C} - (t_1 + 273,15\,^\circ\mathrm{C}) = t_2 - t_1 = \Delta t. \tag{1.11}$$

1.1.5 Broj stepeni slobode - zakon ekviparticije energije

Broj stepeni slobode predstavlja broj načina na koji neko tijelo može skladištiti energiju i jednak je broju nezavisnih koordinata, kojima možemo opisati kretanje tijela ili sistema tijela.

Ukupna energija neke čestice gasa jednaka je zbiru njene kinetičke i potencijalne energije. Kinetička energija može da potiče od translacije i rotacije, a potencijalna energija od gravitacione sile Zemlje i međudjelovanja čestica gasa. S obzirom da između čestica idealnog gasa nema međudjelovanja, te da je masa njegovih čestica reda veličine 10^{-25} kg, potencijalna energija se može zanemariti. Ukoliko je čestica gasa molekula s dva ili više atoma povezanih različitim vezama, te čestice dobivaju i energiju usljed oscilovanja atoma. Dakle, razlikujemo stepene slobode usljed translacije, rotacije i oscilovanja.

Razmotrimo sada broj stepeni slobode jednoatomnih čestica:

- mogu da se kreću translatorno duž x, y i z ose, te njihovo kretanje možemo opisati s tri nezavisne koordinate. Dakle, broj stepeni slobode usljed translacije $j_T = 3$.

- mogu da se obrću oko svoje ose, ali s obzirom da je njihova masa $m \approx 10^{-27}$ kg, a poluprečnik $r \approx 10^{-15}$ m približna vrijednost momenta inercije im je $I = \frac{2}{5}mr^2 \approx 0$ te je i kinetička energija rotacije $E_{kR} = \frac{I\omega^2}{2} \approx 0$. Dakle, broj stepeni slobode usljed rotacije $j_R = 0$.

- nemaju energiju usljed oscilovanja, jer ne ostvaruju veze s drugim atomima. Dakle, broj stepeni slobode usljed oscilovanja je $j_O = 0$.

Iz gore navedenog slijedi da je broj stepeni slobode jednoatomnih čestica $j = j_T + j_R + j_O = 3$.

Razmotrimo sada broj stepeni slobode dvoatomnih molekula (čestica):

- mogu da se kreće translatorno duž x, y i z ose. Dakle njihovo kretanje možemo opisati s tri nezavisne koordinate. Dakle, broj stepeni slobode usljed translacije $j_T = 3$.

- mogu da se obrću oko x, y i z ose (slika 1.3), ali ako se obrću oko ose na kojoj se nalaze oba atoma kinetička energija usljed rotacije oko te ose je zanemariva, zbog malih dimenzija i masa čestica (kao kod jednoatomnih). Međutim rotacija oko preostale dvije ose nije zanemariva. Takođe se može reći da se uzima u obzir samo broj mogućih rotacija pri kojima se mijenja orijentacija molekule. Dakle, broj stepeni slobode usljed rotacije $j_R = 2$.

- mogu da osciluju jedna u odnosu na drugu, te njihova kinetička energija zavisi od njihovog međusobnog rastojanja. Dakle, broj stepeni slobode usljed oscilovanja je $j_O = 1$.

Ipak, na osnovu gore navedenog ne možemo jednoznačno zaključiti koliki je broj stepeni slobode dvoatomnih čestica. Za višeatomne čestice se pokazuje da broj stepeni slobode zavisi i od temperature:

1. $T < 100\text{K}$ $j = j_T = 3 \rightarrow$ atomi nemaju dovoljno energije za rotiranje i oscilovanje;

2. $100\text{K} < T < 1000\text{K}$ $j = j_T + j_R = 5 \rightarrow$ atomi dobiju dovoljno energije da počnu rotirati;

3. $T > 1000\text{K}$ $j = j_T + j_R + j_O = 7 \rightarrow$ atomi dobiju dovoljno energije da počnu oscilovati.

S obzirom da ćemo mi razmatrati gasove u opsegu temperatura od 100 K do 1000 K, uzimat ćemo da je broj stepeni slobode dvoatomnih gasova $j = 5$, tj. nećemo uzimati u obzir njihovo oscilatorno kretanje.

Određivanje broja stepeni slobode troatomnih čestica (kao i čestica s još većim brojem atoma) je kompleksno. Pored svih gore navedenih faktora, on zavisi također i od geometrije same čestice.

Zakon o ekviparticiji energije kaže da je kinetička energija podjednako raspoređena po svim stepenim slobode, te je srednja kinetička energija jedne čestice onda određena brojem stepeni slobode

$$\overline{E}_k = \frac{j}{2}kT. \tag{1.12}$$

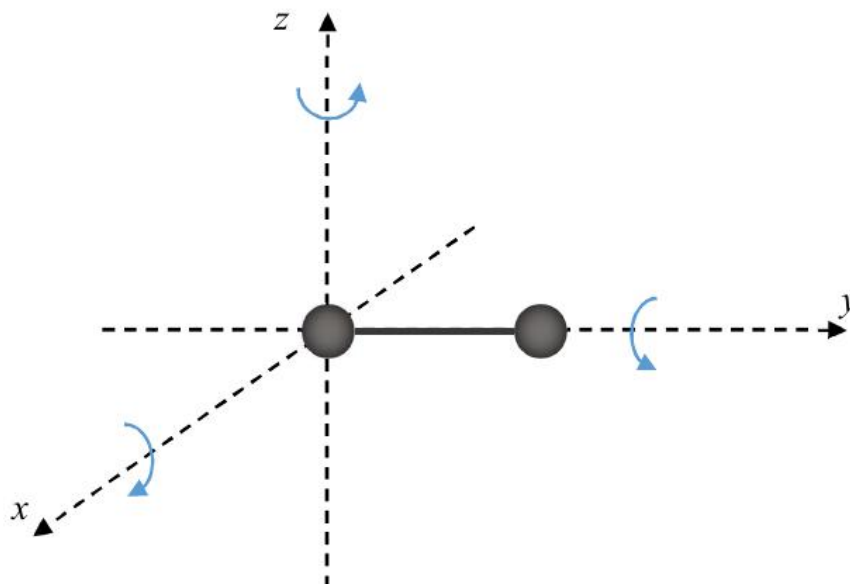
Dakle, kinetička energija translatornog kretanja čestice je $\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT$, odnosno na svaki stepen slobode otpada $\frac{1}{2}kT$ kinetičke energije, što je u saglasnosti s relacijom (1.9).

Ukoliko se želi izraziti srednja ukupna energija svih čestica gasa treba voditi računa da je broj stepeni slobode usljed oscilovanja tada $2 \cdot j_O$ zbog doprinosa potencijalne energije oscilovanja.

1.1.6 Unutrašnja energija

Unutrašnja energija nekog tijela je energija tog tijela, ali ne računajući njegovu kinetičku energiju kao cjeline i potencijalnu energiju u polju vanjske sile. Dakle, **unutrašnja energija nekog tijela je**:

- kinetička energija translatornog, rotacionog i oscilatornog kretanja njegovih čestica,



Slika 1.3. *Moguće rotacije dvoatomne molekule. Samo pri rotaciji oko y i z ose molekula mijenja svoju orijentaciju, te se samo one uzimaju u obzir pri određivanju broja stepeni slobode usljed rotacije.*

- potencijalna energija međudjelovanja čestica,
- energija elektronskih ljuski u atomima i
- nuklearna energija.

Ova podjela ima približan karakter jer jedan oblik energije može preći u drugi. U našem razmatranju zanemarit ćemo posljednja dva oblika energije, tako da je unutrašnja energija suma kinetičkih i potencijalnih energija čestica sistema

$$U = \sum_i E_{k_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} E_{p_{ij}}, \tag{1.13}$$

pri čemu je uzeta 1/2 potencijalnih energija, jer se pri sumiranju javlja potencijalna energija $i - te$ i $j - te$ čestice E_{ij}, te $j - te$ i $i - te$ čestice E_{ji}, a radi se o istoj energiji. Zbog toga je ukupna potencijalna energija polovina sume svih potencijalnih energija. Kod najjednostavnijeg termodinamičkog sistema tj. kod idealnog gasa, međudjelovanje čestica se zanemaruje pa je unutrašnja energija suma kinetičkih energija čestica gasa

$$U = \sum_i E_{k_i}. \tag{1.14}$$

1.1.7 Toplota

Toplota je onaj iznos unutrašnje energije, koji se prenese s toplijeg tijela na hladnije. Jedinica joj je Džul (J). Toplota, dakle nije svojstvo sistema, niti je

funkcija stanja sistema. Ona zavisi od procesa promjene tog stanja. To znači da treba dovesti različite količine toplote da sistem pređe iz jednog stanja u drugo, ukoliko se taj prelaz vrši na različite načine.

Količina toplote potrebna da se zagrije neko tijelo mase m za ΔT, proporcionalna je masi tijela i promjeni temperature tijela:

$$Q = mc\Delta T = mc(T_2 - T_1), \tag{1.15}$$

pri čemu je koeficijent proporcionalnosti c **specifični toplotni kapacitet ili specifična toplota** i on zavisi od vrste tijela. Mjerna jedinica mu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$. Definiše se kao količina toplote koju je potrebno dovesti jediničnoj masi da joj se temperatura promijeni za jedan stepen. Proizvod $mc = C$ predstavlja **toplotni kapacitet** nekog tijela. Mjerna jedinica mu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$. On je brojno jednak količini toplote potrebnoj da se temperatura nekog tijela poveća za jedan stepen

$$C = \frac{dQ}{dT}. \tag{1.16}$$

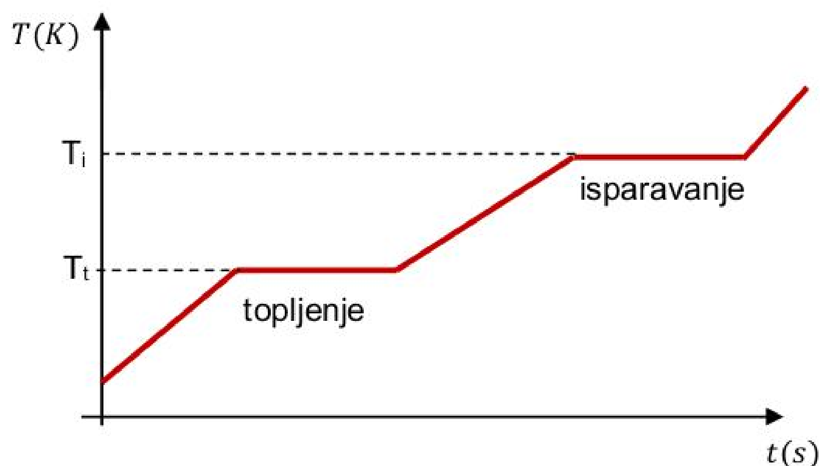
Možemo reći da je toplotni kapacitet jedinične mase tvari u stvari specifični toplotni kapacitet.

Iz jednačine (1.15) se može zaključiti da količina toplote može biti pozitivna i negativna. Kad je $Q > 0$ znači da tijelo prima toplotu, a kad je $Q < 0$ tijelo odaje (emituje) toplotu.

1.1.8 Fazni prelazi

U termodinamici je **faza** skup homogenih dijelova sistema, jednakih po svojim osobinama. Na primjer, ako u zatvorenoj posudi imamo vodu, a iznad nje smjesu vazduha i vodene pare, znači da imamo sistem, koji se sastoji od dvije faze: voda i smjesa vazduha i vodene pare. Ako se u vodu doda led onda on čini treću fazu. Razne kristalne modifikacije jednog tijela također predstavljaju razne faze npr. grafit i dijamant. Ravnoteža dviju faza, koje se međusobno dodiruju, je moguća samo u određenom temperaturnom intervalu, kojem odgovara određena vrijednost pritiska. *Trojna tačka* je određena vrijednost temperature i pritiska, na kojoj mogu sve tri faze iste tvari (čvrsta, tečna i gasovita) biti u ravnoteži. Prelaz iz jedne faze u drugu obično je praćen apsorpcijom ili otpuštanjem određene količine toplote, koja se naziva **latentna toplota**, a takvi prelazi se nazivaju fazni prelazi prve vrste (topljenje, kristalizacija, isparavanje, kondenzacija).

U tečnostima i čvrstim tijelima na svakoj temperaturi postoje molekule čija je energija dovoljna da savladaju privlačenje drugih molekula, napuste površinu tečnosti ili čvrstog tijela i pređu u gasovitu fazu. Prelaženje tečnosti u gasovitu fazu naziva se **isparavanje**, a prelaz čvrstog tijela u gasovito stanje **sublimacija**. Pri isparavanju i sublimaciji tijelo napuštaju najbrže molekule, usljed čega se srednja energija preostalih molekula smanjuje i tijelo se hladi. Da bi se temperatura tijela koje isparava, održavala konstantnom, treba mu neprekidno dovoditi toplotu. Toplota koju treba predati jedinici mase tijela da pređe u paru koja se nalazi na istoj temperaturi, koju je imalo tijelo prije isparavanja, naziva se **specifična toplota isparavanja,** q. Toplota isparavanja se mjeri eksperimentalno, a najjednostavnija su kalorimetrijska mjerenja. Suprotan proces od isparavanja je **kondenzacija**. Toplota utrošena pri procesu isparavanja



Slika 1.4. *Grafički prikaz promjene temperature tijela u vremenu, ukoliko mu se svake sekunde dovodi toplota. Temperatura se ne mijenja dok se faza sistema ne promijeni.*

predaje se pri kondenzaciji. Prelaz čvrstog tijela u tečno vrši se za svako tijelo na određenoj temperaturi, pri čemu se utroši određena količina toplote, koja se naziva **toplota topljenja**. Očvršćavanje je suprotan proces od topljenja. Toplota potrebna da se tijelo mase m prevede iz jedne faze u drugu pri specifičnoj toploti faznog prelaza q, jednaka je

$$Q = mq. \tag{1.17}$$

Ako se tijelu svake sekunde dovodi ista količina toplote, promjena temperature izgleda kao na slici 1.4. Temperatura tijela raste osim kad ono mijenja fazu, tj. dok se tijelo u potpunosti ne otopi ili tečnost ne ispari, temperatura ostaje konstantna.

1.2 Širenje čvrstih tijela pri zagrijavanju

U čvrstom tijelu čestice se nalaze na veoma malom rastojanju i osciluju oko svog ravnotežnog položaja. Zagrijavanjem tijela, brzina čestica se povećava te se one sve više udaljavaju jedna od druge. Ta udaljavanja su veoma mala, ali ako se uzme u obzir ogroman broj čestica ta mala pomjeranja svake čestice ipak dovode do promjene dimenzija samog tijela. Pokazuje se da je ta promjena linearna funkcija temperature, u određenom temperaturnom intervalu. Razlikujmo linearno, površinsko i zapreminsko širenje, zavisno od toga da li se posmatra promjena jedne, dvije ili sve tri dimenzije nekog tijela.

Ako zagrijavamo neku šipku možemo smatrati da se radi o **linearnom širenju** jer je poprečni presjek šipke zanemarivo mali u poređenju s njenom dužinom. Promjena dužine proporcionalna je promjeni temperature (naravno u određenom temperaturnom intervalu)

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 \sim \Delta t. \tag{1.18}$$

Izduženje također zavisi i od početne dužine tijela ℓ_1, te se zbog toga uzima u obzir relativna promjena dužine, koja je također proporcionalna temperaturi

$$\frac{\Delta\ell}{\ell_1} = \alpha\Delta t, \tag{1.19}$$

gdje je koeficijent proporcionalnosti α **termički koeficijent linearnog širenja** i ima jedinicu stepen^{-1}. Gornja jednačina se može napisati i kao

$$\ell_2 = \ell_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)], \tag{1.20}$$

pri čemu je ℓ_1 dužina šipke na temperaturi t_1, a ℓ_2 dužina na temperaturi t_2.

Promjena površine tanke ploče usljed zagrijavanja, predstavlja **površinsko širenje** jer smatramo da je debljina ploče puno manja od ostale dvije dimenzije. Analogno linearnom širenju, i promjena površine ploče je također proporcionalna promjeni temperature u određenom temperaturnom intervalu

$$\frac{\Delta S}{S_1} = \beta\Delta t, \tag{1.21}$$

odnosno

$$S_2 = S_1[1 + \beta(t_2 - t_1)], \tag{1.22}$$

pri čemu je $\beta = 2\alpha$ **termički koeficijent površinskog širenja**, S_1 površina na temperaturi t_1, a S_2 površina na temperaturi t_2.

Zapreminsko širenje, predstavlja promjenu zapremine tijela, ali i fluida, usljed zagrijavanja. U određenom temperaturnom intervalu to širenje je također proporcionalno temperaturi

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \gamma\Delta t, \tag{1.23}$$

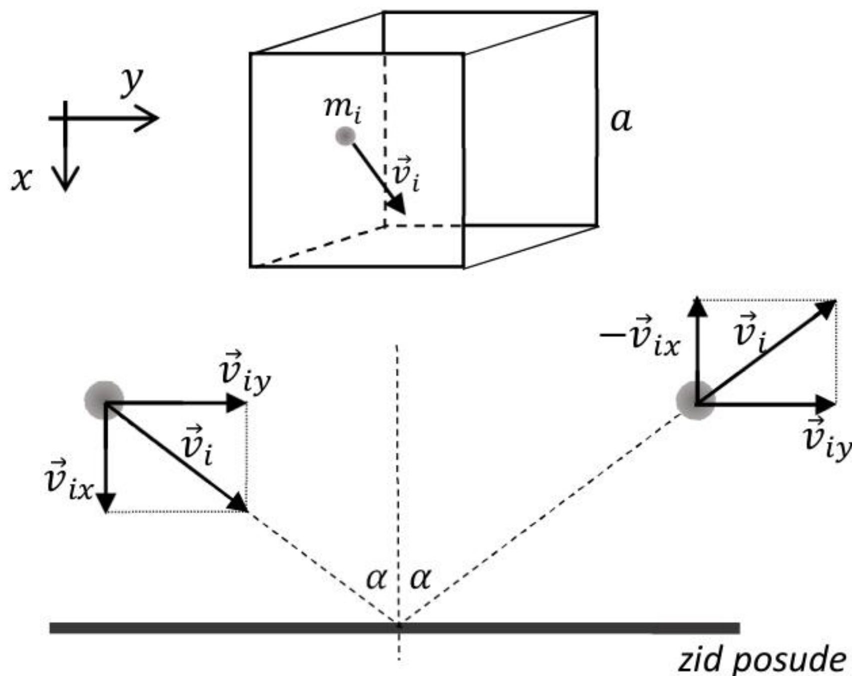
odnosno

$$V_2 = V_1[1 + \gamma(t_2 - t_1)], \tag{1.24}$$

pri čemu je $\gamma = 3\alpha$ **termički koeficijent zapreminskog širenja**, V_1 zapremina na temperaturi t_1, a V_2 zapremina na temperaturi t_2. Treba napomenuti da se gasovi i tečnosti uvijek šire zapreminski, bez obzira na oblik posude u kojoj se nalaze. Za širenje gasova pri konstantnom pritisku, koeficijent zapreminskog širenja je isti za sve gasove i iznosi $\frac{1}{273{,}15}$ stepen^{-1}. O širenju gasova će kasnije biti više govora.

1.3 Idealan gas

Pomenuto je da se najjednostavniji termodinamički sistem može opisati samo s tri parametra (pritiska, zapremine i temperature). Takakv sistem je idealan gas. To je gas kod kojeg se može zanemariti zapremina njegovih čestica (atoma, molekula, jona) i njihovo međudjelovanje. Jedini oblik interakcije između čestica gasa su njihovi međusobni elastični sudari. Ti sudari se veoma rijetko dešavaju tako da se čestice gasa mogu smatrati slobodnim česticama. Iako je idealan gas apstrakcija, dovoljno razrijeđeni gasovi su veoma bliski idealnom gasu (npr. vazduh pri sobnoj temperaturi i atmosferskom pritisku), te je zbog toga njegovo izučavanje značajno.



Slika 1.5. *U posudi oblika kocke, stranice a, nalazi se idealan gas. Proizvoljna čestica mase m_i kreće se brzinom v_i i sudara se sa zidom posude, pri čemu se mijenja samo komponenta brzine koja je okomita na zid.*

1.3.1 Jednačina stanja idealnog gasa

Prema MKT pritisak koji gas stvara na zidove posude u kojoj se nalazi, je rezultat sudara čestica sa zidovima posude. Prilikom sudara čestice predaju posudi određenu količinu kretanja u nekom vremenskom intervalu, tj. djeluju nekom silom na zidove posude. Pritisak gasa predstavalja upravo tu silu, kojom on djeluje na jediničnu površinu posude, okomito na nju. Da bi odredili od čega zavisi taj pritisak, potrebno je još imati u vidu neke pretpostavke:

- idealan gas se sastoji od ogromnog broja čestica, koje su međusobno udaljene na rastojanja mnogo veća od njihove veličine (razrijeđeni gasovi);
- sudari čestica gasa s drugim česticama i sa zidovima posude u kojoj se nalaze su idealno elastični;
- čestice gasa se nalaze u stalnom kretanju pri čemu niti jedan pravac kretanja nije vjerovatniji od drugog tj. čestice se kreću u svim pravcima podjednako.

Neka se u posudi, u obliku kocke stranica a, nalazi N čestica idealnog gasa. Posmatrajmo jednu česticu mase m_i, koja se kreće brzinom $\overrightarrow{v}_i$ po proizvoljnom pravcu. Prema uvedenoj pretpostavci, ona se elastično sudara sa zidom posude i mijenja pravac kretanja kao što je prikazano na slici 1.5. Dakle, brzina čestice ne mijenja intenzitet pri sudaru te zaklapa isti ugao sa zidom prije i poslije

sudara. Dolazi samo do promjene komponente brzine koja je okomita na zid posude, pri čemu se ta promjena ogleda samo u promjeni smjera (tj. u promjeni predznaka). Impuls koji jedna čestica pri takvom sudara preda zidu posude je:

$$\Delta p_{ix} = m_i v_{ix} - (-m_i v_{ix}) = 2 m_i v_{ix}. \tag{1.25}$$

Obzirom da kod idealnog gasa nema međudjelovanja čestica, čestica se kreće ravnomjerno pravolinijski između dva sudara, što znači da će se sudar čestice s istom površinom dogoditi opet nakon vremena:

$$\Delta t = \frac{s}{v_{ix}} = \frac{2a}{v_{ix}} \tag{1.26}$$

(čestica će poslije prvog sudara otići do druge stranice kocke i nazad, što znači da će preći put koji iznosi dvije dužine stranice kocke). Dijeljenjem (1.25) i (1.26) dobivamo silu kojom posmatrana čestica djeluje okomito na zid posude površine S:

$$F_i = \frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = \frac{m_i v_{ix}^2}{a}. \tag{1.27}$$

Sila kojom bi sve molekule udarale o zid posude se dobije sumiranjem po svim česticama:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{ix}^2. \tag{1.28}$$

Ukoliko masu jedne čestice m_i napišemo preko mase gasa u posudi m i broja čestica N kao $m_i = m/N$ slijedi da je

$$F = \frac{m}{Na} \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2. \tag{1.29}$$

U stanju toplotne ravnoteže, pritisak na sve zidove posude je isti tj. svi pravci su jednako vjerovatni, što znači da su komponente brzina u svim pravcima iste. Tada vrijedi da je

$$v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 = 3 v_{ix}^2, \tag{1.30}$$

i

$$F = \frac{m}{3Na} \sum_{i=1}^{N} v_i^2. \tag{1.31}$$

S obzirom da su za makroskopske veličine važne srednje vrijednosti, srednja kvardatna brzina kretanja svih molekula je

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}. \tag{1.32}$$

Konačno se za silu kojom čestice gasa djeluju okomito na zid posude dobiva

$$F = \frac{m}{3a} \overline{v^2}. \tag{1.33}$$

Sada se može izraziti pritisak gasa na zidove posude kao

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{3Sa} \overline{v^2} = \frac{m}{3V} \overline{v^2}, \tag{1.34}$$

gdje je $V = Sa$ zapremina posmatrane kocke (posude). Srednju brzinu kretanja čestica ćemo sada povezati s temperaturom gasa prema jednačini (1.12). Već je od ranije poznato da je srednja kinetička energija svih čestica gasa, a koje vrše translatorno kretanje u tri pravca, jednaka

$$\overline{E}_k = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}NkT, \tag{1.35}$$

što uvrštavanjem u jednačinu (1.34) daje

$$p = \frac{NkT}{V}, \tag{1.36}$$

odnosno

$$pV = NkT, \tag{1.37}$$

što predstavlja **jednačinu stanja idealnog gasa**.

Broj nekih jediniki (u slučaju gasa su to njegove čestice) u jedinici zapremine

$$c = \frac{N}{V} \tag{1.38}$$

predstavlja njihovu **koncentraciju** i izražava se u m^{-3}. Jednačina stanja idealnog gasa se onda može izraziti i preko koncentracije čestica gasa u posmatranoj zapremini kao

$$p = ckT. \tag{1.39}$$

Analizirajući jednačinu stanja (1.37) može se zaključiti da jednake zapremine različitih gasova, pri jednakom pritisku i temperaturi, imaju jednak broj čestica (jer je $\frac{pV}{T} = Nk$). Taj zaključak predstavlja **Avogadrov zakon**. Dakle, broj molekula u određenoj zapremini gasa ne zavisi od njihove veličine ili mase. Ukoliko sada izrazimo broj čestica gasa preko broja molova i Avogadrove konstante kao $N = nN_A$, jednačina stanja postaje

$$pV = nRT, \tag{1.40}$$

pri čemu je uvedena nova konstanta $R = kN_A = 8,314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}$ koja se naziva **univerzalna gasna konstanta**.

Ukoliko se idealan gas nalazi na STP (tj. na standardnom pritisku od $101,325\,\mathrm{kPa}$ i temperaturi od $273,15\,\mathrm{K}$), zapremina jednog mola tog gasa će biti

$$V_m = \frac{nRT}{p} = 2,24 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}} \tag{1.41}$$

i naziva se **normirana molarna zapremina idealnog gasa**. Količina tvari se sada može izraziti i preko zapremine tvari V kao

$$n = \frac{V}{V_m}. \tag{1.42}$$

Kad se u nekoj zapremini nalazi smjesa gasova, tada se jednačina stanja može napisati kao

$$pV = (N_1 + N_2 + N_3 + ...)kT, \tag{1.43}$$

gdje je N_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ broj čestica jedne komponente smjese. Dijeljenjem gornje relacije s V slijedi da je

$$p = \frac{N_1 kT}{V} + \frac{N_2 kT}{V} + \frac{N_3 kT}{V} + ... = p_1 + p_2 + p_3 + ..., \tag{1.44}$$

što znači da je *pritisak smjese gasova, koji hemijski ne međudjeluju, jednak sumi parcijalnih pritisaka koji potiču od svih komponenti smjese.* Ovo predstavlja **Daltonov zakon**.

Da bi se opisao neki realan gas, potrebno je uvesti korekciju za pritisak i zapreminu u jednačinu stanja idealnog gasa. Korekcija za pritisak se uvodi zbog kohezionih sila. Naime pritisak se mjeri na zidu posude u kojoj se nalazi gas, a tu je pritisak manji jer su kohezione sile slabije. Korekcija zapremine je potrebna zbog činjenice da se zapremina čestica gasa ipak ne može zanemariti. Uzimajući ovo u obzir jednačina stanja realnog gasa glasi

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT \tag{1.45}$$

i naziva se **Van der Valsova jednačina** (Johannes Diderik van der Waals, holandski fizičar). Koeficijent a je koeficijent koji zavisi od kohezionih sila, a koeficijent b predstavlja prazan prostor između čestica koje se aproksimiraju kao sfere.

1.3.2 Izoprocesi

Izoprocesi su gasni procesi kod kojih jedan od parametara stanja (p, V i T), pri konstantnoj količini idealnog gasa ($n = const.$), ostaje nepromijenjen. Razlikujemo tri izoprocesa: izobarni, izohorni i izotermni.

Izobarni proces

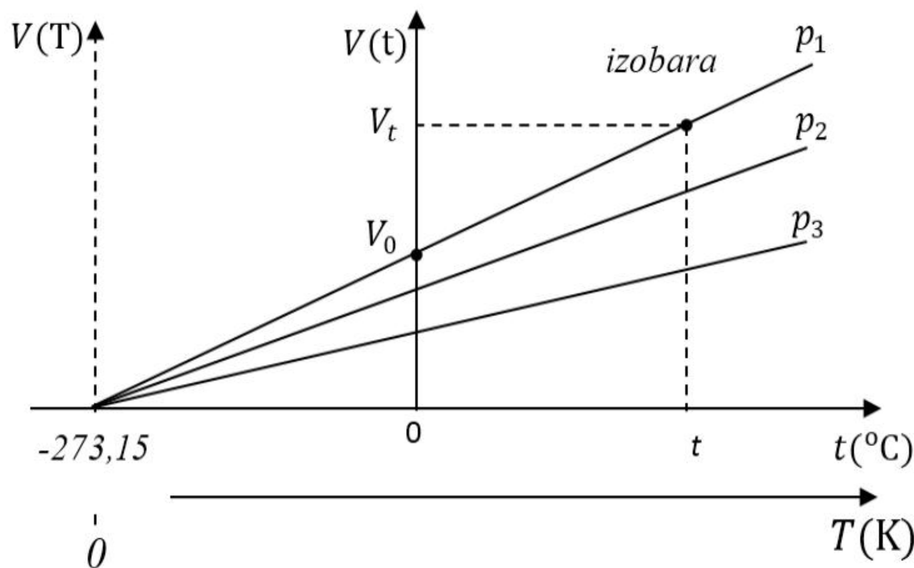
Ukoliko se određena količina gasa podvrgne takvom termodinamičkom procesu, pri kojem pritisak tog gasa ostane nepromijenjen ($p = const.$), dok se ostali parametri stanja mijenjaju, kažemo da je takav proces **izobarni**. Jednačinu stanja idealnog gasa možemo napisati u obliku:

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{nR}{p}, \tag{1.46}$$

te u slučaju izobarnog procesa ($n = const.$, $p = const.$), a uzimajući u obzir i da je R također konstanta, slijedi

$$\frac{V}{T} = const. \tag{1.47}$$

Gornji izraz predstavlja **Gej-Lisakov zakon** (francuski hemičar i fizičar Joseph Gay-Lussac), koji se može iskazati na sljedeći način: količnik zapremine i apsolutne temperature određene količine idealnog gasa, pri izobarnom procesu ostaje konstantan. Ukoliko se postavi koordinatni sistem, tako da je na apscisi apsolutna temperatura gasa, a na ordinati zapremina, linija koja povezuje sva stanja s istim pritiskom naziva se **izobara** (slika 1.6).



Slika 1.6. *Zavisnost zapremine gasa od temperature, pri konstantnom pritisku, je linearna funkcija, čiji se grafik naziva izobara.*

Ukoliko se temperatura u jednačini (1.47) izrazi u stepenima celzijusa, dobiva se poznata relacija zapreminskog širenja

$$V = V_0(1 + \gamma t), \tag{1.48}$$

gdje je V_0 zapremina gasa na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, te se Gej-Lisakov zakon može definisati i na sljedeći način: zagrijavanjem određene količine idealnog gasa za $1\,^{\circ}\mathrm{C}$, pri konstantnom pritisku, njegova zapremina se poveća za $\frac{1}{273{,}15}$ti dio zapremine, koju je gas imao na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Koeficijent γ je već pomenuti koeficijnet zapreminskog širenja čija je vrijednosti $\frac{1}{273{,}15}$ stepen^{-1}.

Izohorni proces

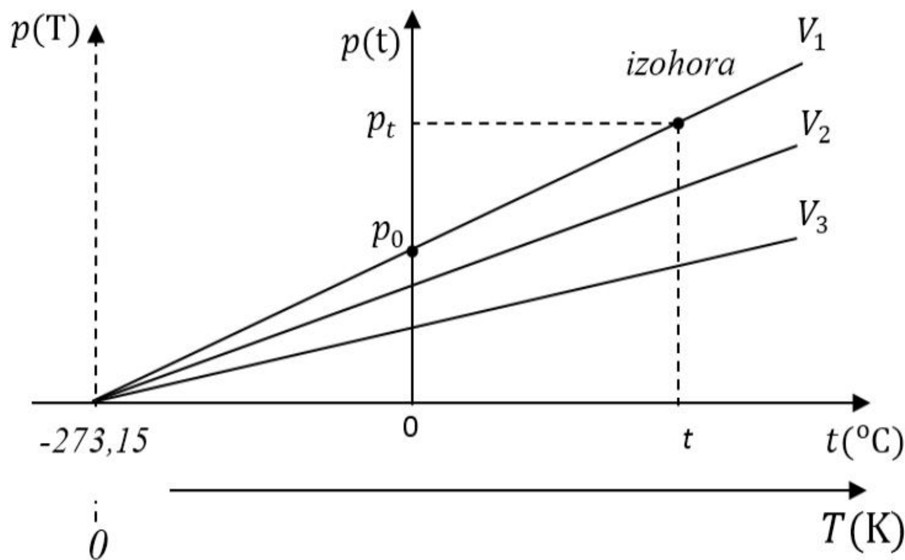
Ukoliko se određena količina gasa podvrgne takvom termodinamičkom procesu, pri kojem zapremina tog gasa ostane nepromijenjena ($V = const.$), dok se ostali parametri stanja mijenjaju, kažemo da je takav proces **izohorni**. Jednačinu stanja idealnog gasa možemo napisati u obliku:

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}, \tag{1.49}$$

te u slučaju izohornog procesa ($n = const., V = const.$), a uzimajući u obzir i da je R također konstantna veličina, slijedi

$$\frac{p}{T} = const. \tag{1.50}$$

Gornji izraz predstavlja **Šarlov zakon** (francuski naučnik Jacques Charles), koji se može iskazati na sljedeći način: količnik pritiska i apsolutne temperature



Slika 1.7. *Zavisnost pritiska gasa od temperature, pri konstantnoj zapremini, je linearna funkcija, čiji se grafik naziva izohora.*

određene količine idealnog gasa, pri izohornom procesu ostaje konstantan. Ukoliko se postavi koordinatni sistem, tako da je na apscisi apsolutna temperatura gasa, a na ordinati pritisak, linija koja povezuje sva stanja s istom zapreminom naziva se **izohora** (slika 1.7).

Ukoliko se temperatura u jednačini (1.50) izrazi u stepenima celzijusa, dobiva se Šarlov zakon u obliku

$$p = p_0(1 + \gamma t), \tag{1.51}$$

gdje je p_0 pritisak gasa na 0 °C. Prema relaciji (1.51) Šarlov zakon se može definisati i na sljedeći način: zagrijavanjem određene količine idealnog gasa za 1 °C, pri konstantnoj zapremini, njegov pritisak se poveća za $\frac{1}{273{,}15}$ti dio pritiska, koji je gas imao na 0 °C.

Izotermni proces

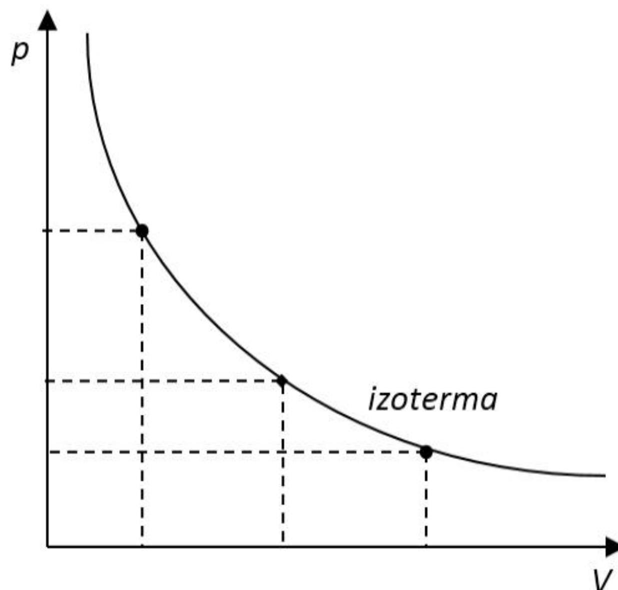
Ukoliko se određena količina gasa podvrgne takvom termodinamičkom procesu, pri kojem temperatura tog gasa ostane nepromijenjena ($T = const.$), dok se ostali parametri stanja mijenjaju, kažemo da je takav proces **izotermni**. Iz jednačine stanja idealnog gasa

$$pV = nRT, \tag{1.52}$$

vidimo da su pri izotermnom procesu, svi članovi na desnoj strani jednačine, konstantne veličine, što znači da je

$$pV = const. \tag{1.53}$$

a što predstavlja **Bojl-Mariotov zakon** (irski naučnik Robert Boyle, francuski fizičar Edme Mariotte) koji glasi: proizvod pritiska i zapremine određene količine idealnog gasa, pri izotermnom procesu je konstantan. Ukoliko se postavi



Slika 1.8. *Grafik zavisnosti pritiska gasa od zapremine, pri konstantnoj temperauri, naziva se izoterma.*

koordinatni sistem, tako da je na apscisi zapremina gasa, a na ordinati pritisak, linija koja povezuje sva stanja s istom temperaturom naziva se **izoterma** (slika 1.8). Izoterma nije prava linija, jer pritisak nije linearna funkcija zapremine, već je obrnuto proporcionalan zapremini tj. $p = f(\frac{1}{V})$.

1.3.3 Raspodjela čestica idealnog gasa po brzinama

Jedna od osnovnih pretpostavki MKT je da su svi pravci kretanja čestica jednako vjerovatni, odnosno pretpostavlja se ravnomjerna raspodjela čestica po svim pravcima. To znači da se u prosjeku, u proizvoljnom smjeru i u proizvoljnom trenutku, kreće isti broj čestica kao i u bilo kojm drugom smjeru. Međutim to nije slučaj i s brzinama. Njihova vrijednost se kreće od 0 do ∞ (samo u teorijskim razmatranjima, jer čestica će uvijek imati neku konačnu brzinu ma koliko ona velika bila), ali vjerovatnoća za svaku vrijednost brzine nije ista. Na primjer, pri uzastopnim sudarima, čestica može svaki put da primi energiju, te bi joj energija bila znatno veća od srednje energije svih čestica, a samim tim i brzina bi joj bila znatno veća od neke srednje brzine. Međutim, procesi koji bi doveli do koncentrisanja velike energije na jednoj čestici su malo vjerovatni, što znači da će se veoma velike vrijednosti brzine izuzetno rijetko realizovati u poređenju s nekom srednjom vrijednosti. Isto je i u obrnutom slučaju, tj. veoma rijetko će se desiti da se pri sudaru čestica zaustavi. Dakle, možemo zaključiti da su veoma velike i veoma male vrijednosti brzine, u poređenju sa srednjom vrijednosti, malo vjerovatne.

Kad bismo mogli u istom trenutku da odredimo brzine svih čestica nekog gasa, te njihove vrijednosti nanesemo na brojnu osu, vidjeli bi da se vrijednosti brzina čestica grupišu oko neke *najvjerovatnije vrijednosti.* Kad bismo sve

brzine bile jednako vjerovatne, tačke na brojnoj osi bi bile ravnomjerno raspoređene. Prilikom sudara dolazi do promjene brzina čestica, ali ako se gas nalazi u ravnotežnom stanju raspodjela čestica po brzinama ostaje nepromijenjena. To znači da će gustina čestica na pojedinim dijelovima brojne ose u toku vremena ostati ista, ali će zavisiti od mjesta na osi tj. bit će funkcija brzine

$$\rho(v) = \frac{dN}{dv} \tag{1.54}$$

Zbog činjenice da je gustina ρ proporcionalna ukupnom broju čestica (pri istom pritisku i temperaturi), definiše se funkcija, koja je ista za različit broj čestica gasa (tj. za različitu količinu gasa):

$$f(v) = \frac{1}{N}\rho(v) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}. \tag{1.55}$$

i naziva se **funkcija raspodjele**. Ona određuje vjerovatnoću da neka čestica gasa ima vrijednost brzine u intervalu od v do $v + dv$. Brzina koja odgovara maksimalnoj vrijednosti funkcije raspodjele je **najvjerovatnija brzina** i može se odrediti iz uslova

$$\frac{df(v)}{dv} = 0. \tag{1.56}$$

Vjerovatnoća da dN čestica ima neku brzinu iz intervala dv je:

$$dw(v) = \frac{dN}{N} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}dv,$$

$$dw = f(v)dv. \tag{1.57}$$

Ukupna vjerovatnoća je

$$w = \int_0^\infty dw \tag{1.58}$$

i predstavlja vjerovatnoću da će neka čestica gasa imati neku vrijednost brzine iz intervala od 0 do ∞. S obzirom da brzina čestice u gasu ima uvijek neku konačnu vrijednost, tada je vjerovatnoća w, vjerovatnoća sigurnog događaja pa je stoga jednaka 1:

$$w = \int_0^\infty dw = \int_0^\infty f(v)dv = 1. \tag{1.59}$$

Ova jednakost se naziva **uslov normiranja** funkcije $f(v)$.

Pomoću funkcije raspodjele možemo izračunati **srednju brzinu** kao

$$\overline{v} = \int v f(v)dv, \tag{1.60}$$

odnosno srednju vrijednost kvadrata brzine

$$\overline{v^2} = \int v^2 f(v)dv, \tag{1.61}$$

iz koje se definiše **efektivna brzina**

$$v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}. \tag{1.62}$$

Da bi se odredile vrijednosti najvjerovatnije, srednje i efektivne brzine potrebno je poznavati eksplicitan izraz funkcije raspodjele.

1.3.4 Maksvelova funkcija raspodjele

Funkciju raspodjele čestica po brzinama teorijski je utvrdio Džejms Klerk Maksvel (škotski naučnik James Clerk Maxwell). Ona se danas naziva Maksvelova funkcija raspodjele i ima oblik

$$f(v) = Ae^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2, \tag{1.63}$$

gdje je m masa jedne čestice, k Bolcmanova konstanta i T temperatura gasa. Koeficijent A ne zavisi od brzine čestice i određuje se iz uslova normiranja na slijedeći način:

$$\int_0^\infty f(v)dv = \int_0^\infty Ae^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2dv = 1,$$

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2dv},$$

$$A = \frac{1}{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx}, \tag{1.64}$$

pri čemu je izvršena zamjena

$$x^2 = \frac{m}{2kT}v^2$$

iz koje slijedi

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}x \quad i \quad dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}}dx.$$

Integral u relaciji (1.64) je tipski integral čija je vrijednost

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

te je konačno

$$A = \frac{1}{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}.\right)^{\frac{3}{2}} \tag{1.65}$$

Uvrštavajući dobivenu vrijednost faktora normiranja, Maksvelova funkcija ima konačan oblik

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2, \tag{1.66}$$

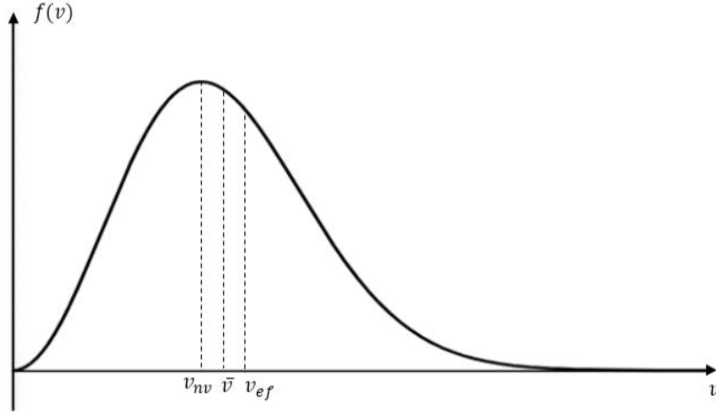
a njen grafik dat je na slici 1.9.

Sada, kad je poznat izraz za funkciju raspodjele, možemo odrediti specifične vrijednosti brzina, kao što su najvjerovatnija, srednja i efektivna. U prethodnom odjeljku je rečeno da je **najvjerovatnija brzina**, ona koja odgovara maksimumu funkcije raspodjele, dakle ona za koju vrijedi da je

$$\frac{df(v)}{dv} = 0. \tag{1.67}$$

Kad uvrstimo Maksvelovu funkciju raspodjele (1.66) u gornji uslov dobije se:

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left(Ae^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2\right) = 0,$$



Slika 1.9. *Grafik Maksvelove funkcije raspodjele čestica $f(v)$ po brzinama v. Površina koju ograničava kriva $f(v)$, prema uslovu normiranja, jednaka je jedinici. Maksimum funkcije odgovara najvjerovatnijoj brzini v_{nv}. Brzina $\overline{v}$ predstavlja srednju brzinu, dok je v_{ef} efektivna brzina.*

$$A\left[e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\left(-\frac{2vm}{2kT}\right)v^2+e^{-\frac{m}{2kT}v^2}2v\right]=0,$$

$$A2ve^{-\frac{m}{2kT}v^2}\left(1-\frac{mv^2}{2kT}\right)=0.$$

Gornji uslov će biti ispunjen u tri slučaja:

- kad je $v=0$;
- kad je $e^{-\frac{m}{2kT}v^2}=0$, a to će biti kad $v\to\infty$;
- kad je $1-\frac{mv^2}{2kT}=0$, a to će biti kad je $v=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Za prva dva slučaja je očito da ne odgovaraju maksimumu funkcije raspodjele, što znači da je vrijednost brzine dobivena iz trećeg uslova upravo vrijednost najvjerovatnije brzine. Dakle, najvjerovatniju brzinu možemo izračunati kao

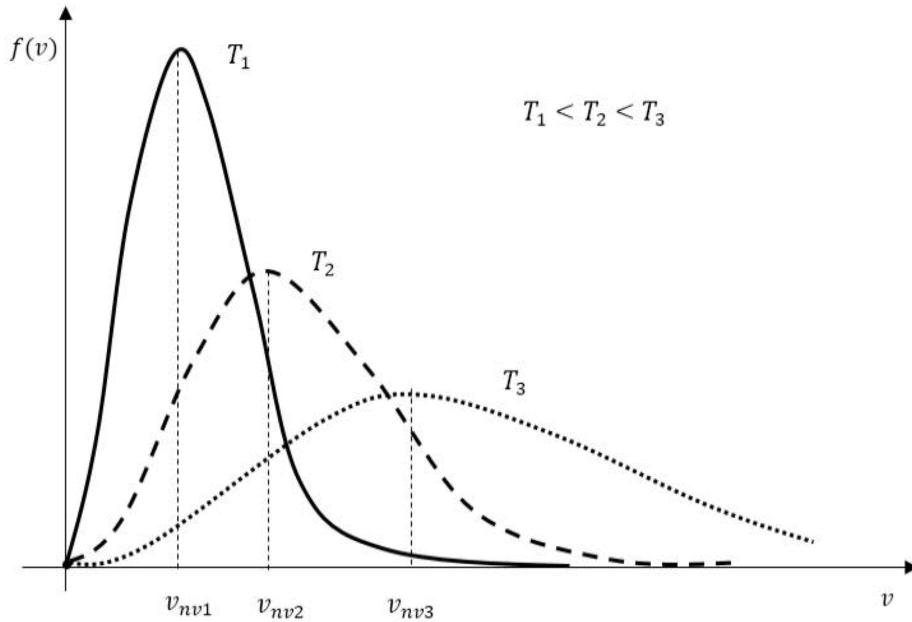
$$v_{nv}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{1.68}$$

Kad ovu brzinu uvrstimo u izraz za (1.66) dobije se maksimalna vrijednost funkcije raspodjele:

$$f(v_{nv})=f_{max}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2kT}v_{nv}^2}v_{nv}^2,$$

$$f_{max}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-1}\frac{2kT}{m},$$

$$f_{max}=\frac{4}{e}\sqrt{\frac{m}{2k\pi T}}, \tag{1.69}$$



Slika 1.10. *Grafici Maksvelove funkcije raspodjele čestica istog gasa za tri različite temperature. Grafici bi imali isti oblik ukoliko bi se razmatrali različiti gasovi na istoj temperaturi, takvi da su mase njihovih čestica* $m_1 > m_2 > m_3$.

iz koje možemo zaključiti da je maksimalna vrijednost funkcije raspodjele obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu apsolutne temperature $f_{max} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$. To znači da će se, pri povećanju temperature, maksimum funkcije raspodjele smanjivati što je prikazano na slici 1.10. Osim toga, maksimum će se pomjerati ka većim brzinama, jer je najvjerovatnija brzina direktno proporcionalna kvadratnom korijenu apsolutne temperature, što se vidi iz jednačine (1.68). Ista stvar bi se desila i kad bi smanjivali masu čestica. Površina ispod svake krive na slici 1.10 je, zbog uslova normiranja, jednaka jedinici.

Brzina, koja ima malo manju vjerovatnoću od v_{nv}, je **srednja brzina** $\overline{v}$. Nju možemo izračunati iz izraza (1.60), uvrštavajući izraz za Maksvelovu funkciju raspodjele:

$$\overline{v} = \int_0^\infty vAe^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2dv,$$

$$\overline{v} = A\int_0^\infty v^3e^{-\frac{m}{2kT}v^2}dv. \tag{1.70}$$

Integral u gornjem izrazu, možemo predstaviti kao tipski integral, s neparnim eksponentom $n = 2z + 1$, oblika

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx = \frac{z!}{2\alpha^{z+1}}.$$

U našem slučaju $n = 3$ odnosno $z = 1$, pa je vrijednost faktorijela $z! = 1! = 1$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Ako zamijenimo konstantu $\alpha = \frac{m}{2kT}$ i konstantu A prema izrazu (1.65) na osnovu jednačine (1.70) dobivamo izraz za srednju brzinu:

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{2},$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{1.71}$$

Iz zakona o ekviparticiji energije, koji je dat relacijom (1.12), za translatorno kretanje čestica ($j = 3$) možemo dobiti vrijednost **srednje kvadratne brzine**, odnosno **efektivne brzine**:

$$\overline{E}_k = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} \Rightarrow v_{ef} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{1.72}$$

Da bismo provjerili, da li se isti izraz dobije i pomoću Maksvelove funkcije raspodjele, koristićemo izraze (1.61) i (1.62):

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 A e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v^2 dv,$$

$$\overline{v^2} = A\int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv. \tag{1.73}$$

Integral u gornjem izrazu se također može napisati u obliku tipskog integrala s parnim eksponentom $n = 2z$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2z-1)}{2^{z+1}\alpha^{z+\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi}.$$

U našem slučaju je $n = 4$, odnosno $z = 2$ i $\alpha = \frac{m}{2kT}$ pa je vrijednost integrala:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{m}{2kT}x^2} dx = \frac{3}{8\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{\pi} = \frac{3}{8}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}.$$

Konačno, srednju kvadratnu i efektivnu brzinu ćemo dobiti uvrštavanjem gornje vrijednosti integrala i konstante A u izraz (1.73):

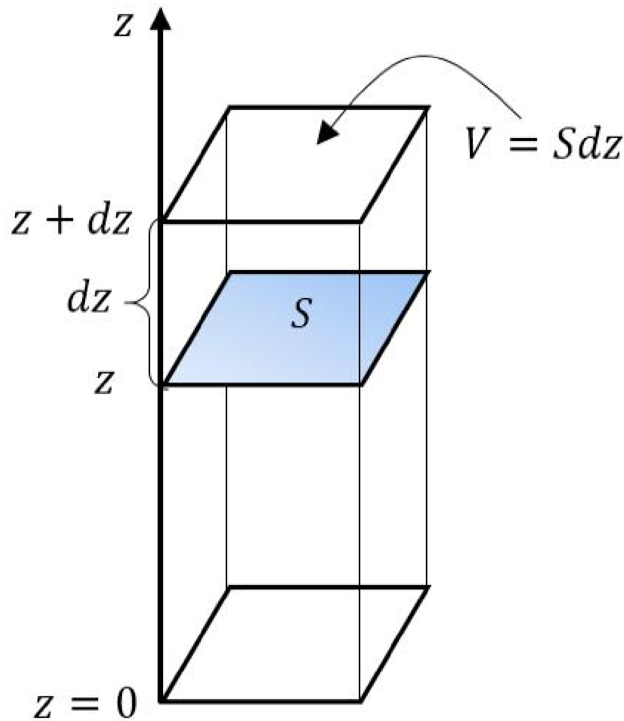
$$\overline{v^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{8}\left(\frac{2kT}{m},\right)^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} \Rightarrow v_{ef} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \tag{1.74}$$

koja se poklapa s izrazom (1.72). Iz odnosa sve tri gore pomenutih vrijednosti brzina

$$v_{nv} : \overline{v} : v_{ef} = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22 \tag{1.75}$$

se vidi da se vrijednosti srednje i efektivne brzine veoma malo razlikuju od vrijednosti najvjerovatnije brzine.



Slika 1.11. *Vazdušni stub, površine baze S na čije čestice djeluje sila u pravcu z-ose.*

Maksvelova funkcija raspodjele je samo specijalni slučaj opšteg principa raspodjele, koji je izveo Bolcman i u kojem odnos $energija/kT$ nije ograničen samo na kinetičku energiju translacije. Upravo zbog tog uopštavanja ta funkcija raspodjele se često naziva **Maksvel-Bolcmanova raspodjela**, koja vrijedi za sisteme jednakih čestica, u kojima se može zanemariti njihovo međudjelovanje i koje se nalaze u termodinamičkoj ravnoteži u nekom potencijalnom polju sile.

1.3.5 Idealan gas u vanjskom polju sile

Zamislimo vertikalni stub, čija je površina osnovice S i u kojem se nalazi idealan gas kao na slici 1.11. Neka na sve čestice gasa djeluju vanjske sile istog smjera (neka je to smjer z-ose). Zbog djelovanja tih sila, koncentracija čestica u stubu neće biti ravnomjerna, već će biti funkcija visine z. Neka je c_0 koncentracija čestica na nultom nivou $z = 0$. Posmatrajmo sad jedan dio zapremine tog stuba debljine dz, koji se nalazi između visina z i $z + dz$. Zapremina tog dijela stuba je $V = Sdz$, a koncentracija čestica u toj zapramini je:

$$c = \frac{N}{V} = \frac{N}{Sdz}. \tag{1.76}$$

Treba napomenuti da su koncentacije c i c_0 samo u prosjeku konstante na datoj visini, jer se čestice stalno spuštaju i podižu (usljed haotičnog kretanja), tako da se broj čestica u jedinici zapremine stalno mijenja (fluktuira). Neka je $F(z)$

sila koja djeluje na jednu česticu gasa na visini z. Tada je pritisak koji čestice iz pomenute zapremine V vrše na površinu S jednak

$$dp = N\frac{F(z)}{S}. \tag{1.77}$$

Ukoliko gornji izraz pomonožimo s $\frac{dz}{dz}$ dobijamo:

$$dp = N\frac{F(z)}{S}\frac{dz}{dz} = cF(z)dz. \tag{1.78}$$

Ako je polje sila $F(z)$ potencijalno tada vrijedi da je sila jednaka gradijentu potencijalne energije

$$F(z) = -gradE_p, \tag{1.79}$$

što u našem slučaju znači

$$F(z) = -\frac{dE_p}{dz}, \tag{1.80}$$

jer se $grad = \frac{\partial}{dx} + \frac{\partial}{dy} + \frac{\partial}{dz}$ svodi na $\frac{\partial}{dz}$ zbog tog što sila djeluje samo u pravcu z-ose. Uvrštavanjem gornjeg izraza u (1.78) dobijamo

$$dp = -cdE_p. \tag{1.81}$$

Ukoliko pritisak izrazimo preko jednačine stanja idealnog gasa izražene preko koncentacije čestica gasa $p = ckT$ i ukoliko smatramo da je temperatura gasa na svim visinama ista, onda je:

$$\begin{aligned} dp &= d(ckT), \\ -cdE_p &= kTdc, \\ \frac{dc}{c} &= -\frac{dE_p}{kT}, \end{aligned} \tag{1.82}$$

što nakon integracije daje

$$\ln c = -\frac{E_p}{kT} + \ln C. \tag{1.83}$$

Konstanta integracije C se određuje iz početnog uslova, tj. da je na nultom nivou $(z = 0)$ $c = c_0$, a tada je $E_p = 0$, što znači da je $\ln c_0 = \ln C$, te dobijamo formulu, koja povezuje promjenu gustine s potencijalnom energijom njegovih čestica i koja se naziva **Bolcmanova formula**

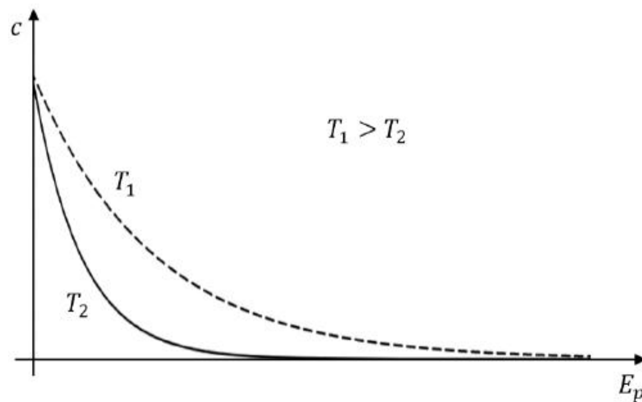
$$c = c_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}. \tag{1.84}$$

Njen grafički prikaz, za dvije različite temperature, dat je na slici 1.12.

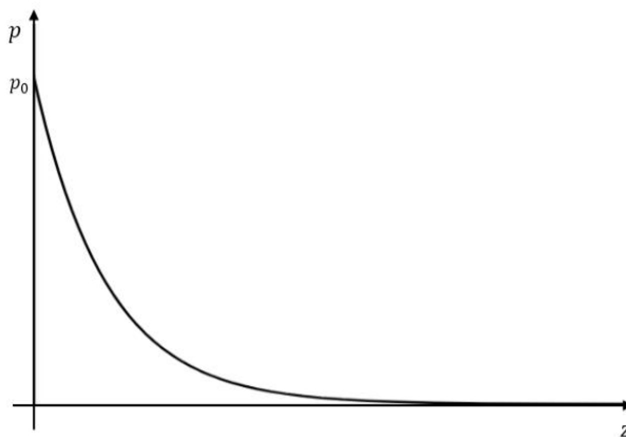
Ako uzmemo u razmatranje specijalni slučaj npr. polje Zemljine teže, potencijalna energija čestica na nekoj visini z je $E_p = mgz$ pa jednačina (1.84) prelazi u **Laplas-Bolcmanovu formulu** za raspodjelu čestica gasa s visinom u polju Zemljine teže

$$c = c_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \tag{1.85}$$

Slično kao i raspodjela molekula po brzinama i ova raspodjela je statistički zakon te važi sve dok je broj čestica veoma velik.



Slika 1.12. *Grafik zavisnosti koncentracije gasa od potencijalne energije čestica gasa u nekom vanjskom polju za dvije različite temperature.*



Slika 1.13. *Grafik zavisnosti pritiska gasa od visine z, u polju Zemljine teže, prema barometarskoj formuli.*

S obzirom da je koncentracija čestica direktno proporcionalna pritisku $p = ckT$, jednačina (1.85) se može napisati preko pritiska gasa kao

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \tag{1.86}$$

što se naziva **barometarska formula**. Njen grafički prikaz dat je na slici 1.13 sa koje se vidi da pritisak opada s povećanjem visine. Barometarska formula omogućava da se izračuna atmosferski pritisak na visini z, odnosno da se odredi visina ukoliko je poznat pritisak. Na principu barometarske formule se zasniva rad visinomjera ili altimetra.

Dakle, kad ne bi bilo termičkog kretanja čestica vazduha, one bi pod djelovanjem sile teže pale na Zemlju, formirajući tanak sloj vazduha oko nje. U suprotnom, kad ne bi bilo sile Zemljine teže, čestice vazdušnog omotača bi se usljed haotičnog kretanja raspršile svud po svemiru. Postojanje vazdušnog omotača oko Zemlje je uslovljeno istovremenim postojanjem termičkog kretanja molekula

i gravitacione sile Zemlje, što kao posljedicu daje tačno definisanu raspodjelu koncentracije molekula po visini u atmosferi, tj. promjenu pritiska s udaljenošću od Zemlje.

1.4 Transportne pojave u gasovima

Procesi koji nastaju usljed haotičnog kretanja čestica gasa, prilikom kojeg one prenose masu, energiju i impuls iz jedne tačke prostora u drugu nazivaju se **transportne pojave (fenomeni)**. Te pojave, u zavisnosti od veličine koja se prenosi (transportuje) i uzročnika koji dovodi do njenog prenosa, se dijele na:

1. **unutrašnje trenje (viskoznost)** – transport impulsa – uzrok je postojanje gradijenta brzine između slojeva gasa;
2. **difuzija** – transport mase – uzrok je postojanje gradijenta koncentracije čestica;
3. **toplotna provodljivost** – transport energije – uzok je postojanje gradijenta temperature.

Ovdje ćemo objasniti transport mase i energije, ali prije toga je potrebno definisati **srednji slobodni put** čestica gasa, λ. To je put koji čestica pređe između dva uzastopna sudara. Jednak je količniku udaljenosti, koju pređe čestica u nekom vremenskom intervalu Δt, krećući se nekom srednjom brzinom $\overline{v}$ i broja sudara N, koji se dogode u istom vremenskom intervalu

$$\lambda = \frac{\overline{v}\Delta t}{N}. \tag{1.87}$$

U vremenskom intervalu Δt čestica se sudara s onim česticama, koje se nalaze u cilindru dužine $\overline{v}\Delta t$ i efektivnog poprečnog presjeka $\sigma = \pi d^2$, gdje je d efektivni dijametar čestice. Broj sudara jednak je broju čestica u pomenutom cilindru $N = Vc = \overline{v}\Delta t\pi d^2 c$ (c je koncentracija čestica u tom cilindru). Međutim, uzimajući u obzir da se sve čestice kreću, jedne u odnosu na druge, u proračunu dužine cilindra ipak moramo uzeti u obzir srednju relativnu brzinu njihovog kretanja

$$\overrightarrow{v}_{rel} = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2,$$

odnosno njen intenzitet

$$v_{rel}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha. \tag{1.88}$$

S obzirom da se uzimaju srednje vrijednosti, možemo izjednačiti brzine $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{v}$. Ugao α je ugao između brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ i on može da poprima vrijednosti od 0 do 180°, što znači da je njegova srednja vrijednost 90°, te je srednja relativna brzina:

$$\overline{v}_{rel}^2 = \overline{v}^2 + \overline{v}^2 - 2\overline{v}^2\cos 90^\circ,$$

$$\overline{v}_{rel} = \sqrt{2}\overline{v}. \tag{1.89}$$

Dakle broj sudara u nekom vremenskom intervalu će biti

$$N = \sqrt{2}\overline{v}\Delta t\pi d^2 c, \tag{1.90}$$

odnosno srednji slobodni put

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 c}. \tag{1.91}$$

1.4.1 Difuzija - transport mase

Transportna pojava, koja opisuje prenos mase supstance s jednog mjesta na drugo, kao posljedica postojanja gradijenta koncentracije, naziva se **difuzija**. Ako se u nekoj posudi s pregradom nalaze dva gasa na različitom pritisku, nakon uklanjanja pregrade gasovi će se međusobno pomiješati, tako da će smjesa postati homogena, a pritisak će biti isti u svakom dijelu posude. Dakle, došlo je do miješanja gasova prelaskom čestica s jednog mjesta na drugo, pri čemu je prenesena (transportovana) određena masa gasa kretanjem čestica. To je pomenuti proces difuzije.

Količina difundovanog gasa dm kroz neku površinu S proporcionalna je toj površini, vremenu za koje se difuzija vrši dt i razlici koncentracija čestica dc u dvije tečke s obje strane te površine, a obrnuto proporcionalna rastojanju između te dvije tačke dx, što predstavlja **Fikov zakon difuzije** (njemački fizičar Adolf Eugen Fick)

$$dm = D \cdot S \cdot dt \cdot \frac{dc}{dx}. \tag{1.92}$$

Konstanta D naziva se **koeficijent difuzije** i zavisi od srednjeg slobodnog puta čestica

$$D = \frac{1}{3}\overline{v}\lambda, \tag{1.93}$$

a član $\frac{dc}{dx}$ naziva se **gradijent koncentracije** na rastojanju dx.

1.4.2 Toplotna provodljivost - transport energije

Ukoliko u nekoj sredini, duž nekog pravca, postoji gradijent temperature, onda duž tog pravca postoji *toplotni tok*, čija se veličina određuje kao

$$q = -\chi \frac{dT}{dx} S, \tag{1.94}$$

gdje je $q = Q/t$ **toplotni tok** i predstavlja količinu toplote koja u jedinici vremena prođe kroz površinu S, koja je okomita na pravac prenosa toplote tj. okomita na x-osu, dT/dx je *gradijent temperature*. Koeficijent χ se naziva **koeficijent toplotne provodljivosti** i zavisi od srednjeg slobodnog puta čestica

$$\chi = \frac{1}{3} c\overline{v}\lambda k \frac{j}{2} \tag{1.95}$$

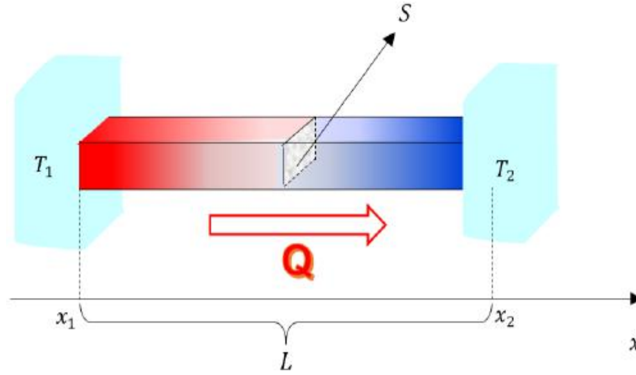
(c je koncentracija čestica, j je broj stepeni slobode, k je Bolcmanova konstanta). Znak "$-$" u relaciji (1.94) ukazuje na činjenicu da se toplota prenosi u smjeru opadanja temperature. Iz gornje relacije slijedi da je količina toplote koja u nekom vremenu prođe kroz neku površinu S

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} St, \tag{1.96}$$

što predstavlja **Furijeov zakon** (francuski fizičar Jean-Baptiste Joseph Fourier).

Postoje tri načina prenosa toplote:

1. provođenje (kondukcija),



Slika 1.14. *Provođenje toplote kroz ravan štap, čiji su krajevi spojeni na toplotne rezervoare stalnih temperatura T_1 i T_2 takvih da je $T_1 > T_2$. Toplota Q se prenosi u smjeru opadanja temperature.*

2. strujanje (konvekcija),

3. zračenje (radijacija).

Kondukcija se dešava u tijelima bez njihovog kretanja, pri čemu se kinetička energija njegovih čestica, usljed međusobnih sudara, prenosi s čestice na česticu. Na taj način se javlja protok toplote kroz tijelo, od mjesta više temperature do mjesta niže temperature. Konvekcija se može opisati već navedenim Furijeovim zakonom

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} St, \tag{1.97}$$

pri čemu je uzeto da se prenos toplote odvija samo u smjeru x-ose.

Posmatrajmo sada provođenje toplote kroz ravan štap, čiji se krajevi nalaze između dva toplotna rezervoara, stalnih temperatura T_1 i T_2 kao na slici 1.14, toplotni tok kroz poprečni presjek štapa S je

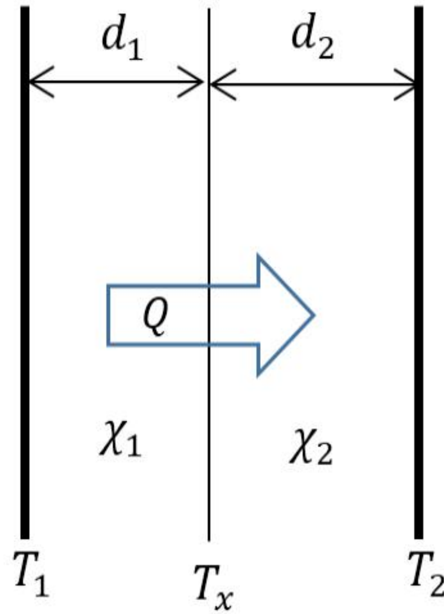
$$q = -\chi \frac{dT}{dx} S. \tag{1.98}$$

Nakon razdvajanja varijabli i integriranja, a pri čemu se uzima u obzir da je površina S nezavisna od varijable x (tj. ista je na svakom mjestu na štapu) za toplotni tok dobivamo:

$$\begin{aligned} q dx &= -\chi S dT \\ q \int_{x_1}^{x_2} dx &= -\chi S \int_{T_1}^{T_2} dT, \\ q(x_2 - x_1) &= -\chi S (T_2 - T_1), \\ q &= -\chi \frac{T_2 - T_1}{L} S, \end{aligned} \tag{1.99}$$

gdje je $L = x_2 - x_1$ dužina štapa.

Sada ćemo razmotriti slučaj kad se toplota prenosi kroz sistem od dva (ili više) paralelnih slojeva prikazan na slici 1.15. Pri tome ćemo smatrati da je toplotni tok stacionaran, tj. da je $q = const.$. Neka su koeficijenti toplotnih



Slika 1.15. *Provođenje toplote kroz više slojeva, različitih koeficijenta toplotne provodljivosti.*

provodljivosti tih slojeva χ_1 i χ_2, a njihove debljine d_1 i d_2. Na krajevima prvog sloja temperature su T_1 i T_x, a drugog T_x i T_2. Toplotni tok kroz svaki sloj je prema jednačini (1.99)

$$q_1 = -\chi_1 \frac{T_x - T_1}{d_1} S \quad \text{i} \quad q_2 = -\chi_2 \frac{T_2 - T_x}{d_2} S. \tag{1.100}$$

S obzirom da je tok stacionaran onda je $q_1 = q_2 = q$ odakle slijedi da je temperatura na mjestu dodira tih slojeva:

$$\chi_1 \frac{T_x - T_1}{d_1} = \chi_2 \frac{T_2 - T_x}{d_2},$$

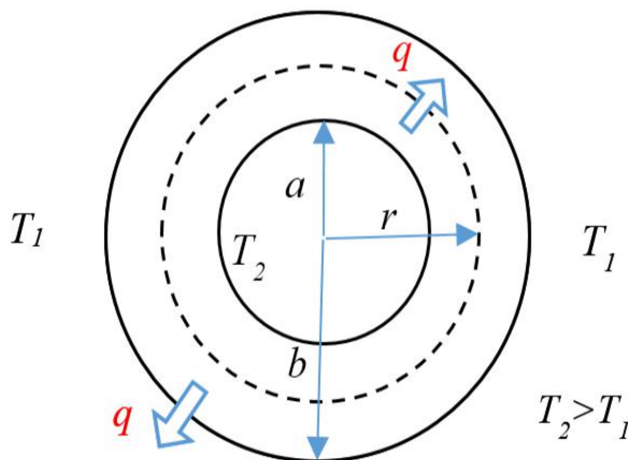
$$T_x = \frac{\frac{\chi_1}{d_1} T_1 + \frac{\chi_2}{d_2} T_2}{\frac{\chi_1}{d_1} + \frac{\chi_2}{d_2}}. \tag{1.101}$$

Kad gornju relaciju uvrstimo u bilo koju od jednačina (1.100) dobivamo

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{d_1}{\chi_1} + \frac{d_2}{\chi_2}} S, \tag{1.102}$$

na osnovu čega možemo izvesti opšti zaključak da je stacionarni toplotni tok kroz n slojeva jednak

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\chi_i}} S, \tag{1.103}$$



Slika 1.16. *Provođenje toplote kroz sloj cilindričnog oblika (cijev).*

gdje su temperature T_1 i T_2 temperature na spoljašnjim stranama krajnjih slojeva.

Protok toplote također zavisi i od oblika površina kroz koje se prenosi toplota. U gornjem primjeru razmatrali smo toplotni tok kroz ravne površine, pri čemu toplota uvijek prolazi kroz istu površinu S. Međutim, kad su površine na primjer cilindrične, proračun toplotnog toka će biti nešto drugačiji. Neka se opet radi o stacionarnom toku, ali kroz cilindričnu površinu kao na slici 1.16. Površina poprečnog presjeka cilindra je $S = 2\pi rL$, gdje je L dužina cilindra, a r poluprečnik cilindra čija vrijednost se kreće od a (unutrašnji poluprečnik) do b (vanjski poluprečnik). Toplotni tok će prema Fourierovom zakonu biti:

$$q = -\chi \frac{dT}{dr} S = -\chi \frac{dT}{dr} 2\pi rL, \tag{1.104}$$

pri čemu trebamo voditi računa da se površina S, kroz koju prolazi toplota, se mijenja idući od unutrašnje ka vanjskoj površini cilindra (tj. zavisi od r). Razdvajanjem varijabli i integriranjem dobivamo:

$$q\frac{dr}{r} = -\chi 2\pi L dT,$$

$$q\int_a^b \frac{dr}{r} = -\chi 2\pi L \int_{T_2}^{T_1} dT,$$

$$q(\ln b - \ln a) = -\chi 2\pi L(T_1 - T_2),$$

$$q = \frac{\chi 2\pi L(T_2 - T_1)}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{1.105}$$

Konvekcija ili strujanje je način prenošenja toplote putem kretanja materijala, najčešće nekog fluida, tako što se čestice prenose sa jednog mjesta na drugo, a s njima i toplota. Toplotni tok pri konvekciji je također rezultat gradijenta temperature i definiše se kao

$$q = \alpha S dT, \tag{1.106}$$

gdje je α *koeficijent konvekcije*. Gornja relacija se češće zapisuje u obliku sličnom toplotnom toku pri kondukciji

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{\alpha}} S. \tag{1.107}$$

Neki od primjera prenosa toplote konvekcijom su centralno grijanje, morske struje, vjetrovi i sl.

Zračenje je oblik prenosa toplote, pri kojem se toplota prenosi posredstvom elektromagnetnih talasa. Toplota prvo prelazi u energiju zračenja, koja se brzinom svjetlosti prenosi do tijela u kojem se ona apsorbuje, te ponovo prelazi u toplotnu energiju. Za prenos toplote zračenjem nije potrebna nikakva supstanca, jer elektromagnetni talasi prolaze i kroz vakuum. O zračenju će biti više govora kasnije.

1.5 Zakoni termodinamike

1.5.1 Prvi zakon termodinamike

U poglavlju 1.1.6 objasnili smo šta je unutrašnja energija nekog gasa. Za idealan gas ona je jednaka sumi kinetičkih energija njegovih čestica. Dakle, unutrašnja energija jednog mola gasa može se izraziti kao proizvod Avogardovog broja i srednje kinetičke energije jedne čestice

$$U_m = N_A \overline{E}_k. \tag{1.108}$$

Unutrašnja energija proizvoljnog broja molova (prozvoljne mase) gasa je onda:

$$U = nU_m = \frac{m}{M} U_m, \tag{1.109}$$

gdje je m masa gasa, a M njegova molarna masa. Pomoću jednačine o ekviparticiji energije (1.12) možemo sada da izrazimo unutrašnju energiju preko temperature gasa kao:

$$U = \frac{m}{M} \frac{j}{2} N_A kT = \frac{m}{M} \frac{j}{2} RT. \tag{1.110}$$

Unutrašnja energija gasa se može mijenjati vršenjem rada nad gasom i toplotnim kontaktom tijela s okolinom drugačije temperature

$$\Delta U = A' + Q, \tag{1.111}$$

pri čemu je $\Delta U = U_2 - U_1$ razlika krajnje i početne vrijednosti unutrašnje energije. Najčešće se umjesto rada, koji izvrše vanjske sile nad gasom (A'), uzima u obzir rad koji izvrši gas protiv vanjskih sila $A = -A'$, te gornja relacija postaje

$$\Delta U = Q - A, \tag{1.112}$$

odnosno

$$Q = A + \Delta U. \tag{1.113}$$

Jednačina 1.113 predstavlja **prvi zakon termodinamike** koji glasi: količina toplote koja se dovodi gasu troši se na promjenu njegove unutrašnje energije i

na vršenje mehaničkog rada protiv vanjskih sila. Ovaj zakon je zapravo zakon održanja energije, koji kaže da se energija ne može uništiti niti stvoriti iz ničega, nego da može samo prelaziti iz jednog oblika u drugi. To znači da je nemoguće napraviti mašinu koja bi vršila rad bez vanjskog izvora energije tj. *perpetuum mobile (vječiti motor) prve vrste.* Treba napomenuti da prvi zakon termodinamike daje vezu između toplote, rada i promjene unutrašnje energije sistema, ali ne određuje smjer toka tih procesa. To određuje drugi zakon termodinamike o kojem ćemo kasnije govoriti.

Kad želimo izračunati količinu toplote koju je gas primio, obično se posmatrani proces razlaže na niz elementarnih procesa, koji odgovaraju maloj promjeni parametara stanja sistema, te će u tom slučaju prvi zakon termodinamike glasiti

$$\delta Q = \delta A + dU. \tag{1.114}$$

Važno je napomenuti da δQ i δA nisu pravi diferencijali, tj. ne mogu se razmatrati kao priraštaji veličina Q i A, odnosno ne mogu se dobiti kao razlika krajnje i početne vrijednosti. Dakle, Q i A nisu funkcije stanja već funkcije procesa. Drugim riječima nisu parametri stanja sistema već *zavise od načina na koji je gas došao iz jednog stanja u drugo.* Integriranjem relacije (1.114) dobivamo

$$Q = A + (U_2 - U_1), \tag{1.115}$$

što je identično relaciji (1.113), pri čemu ne važi da je $\int_1^2 \delta A = A_2 - A_1$.

1.5.2 Rad idelanog gasa

Da bismo pronašli način kako odrediti rad koji izvrši neki gas, posmatrajmo cilindar u kojem se nalazi idealan gas (slika 1.17). Poklopac cilindra je pokretni klip, koji se može pomjerati usljed širenja gasa. Klip je priljubljen uz zidove cilindra tako da može da klizi bez trenja. Kad gasu dovodimo toplotu gas se širi i pomjera klip za neku dužinu dh, vršeći pri tome elementarni rad

$$\delta A = F dh. \tag{1.116}$$

Kad silu izrazimo preko pritiska gasa kao $F = pS$, gdje je S površina klipa, dobivamo

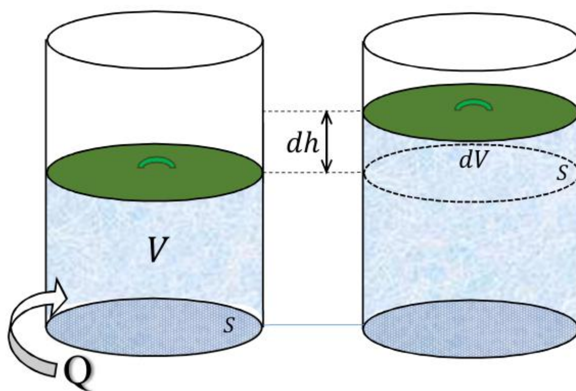
$$\delta A = pSdh. \tag{1.117}$$

Sa slike 1.17 se vidi da je proizvod $Sdh = dV$ predstavlja zapreminu za koju se poveća zapremina gasa (tj. priraštaj zapremine gasa). Ukupan rad za konačnu promjenu zapremine gasa je:

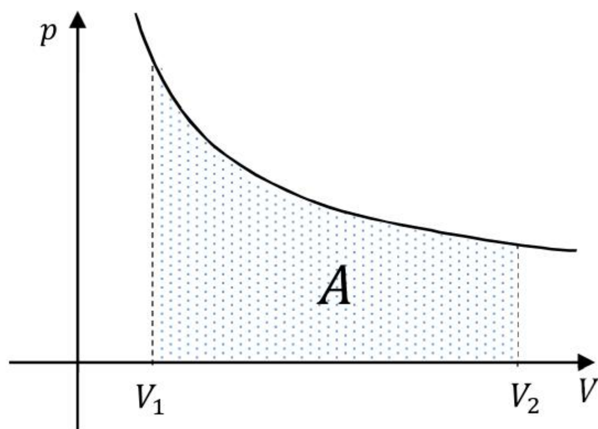
$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 pdV, \tag{1.118}$$

tj. jednak je površini ispod krive zavisnosti pritiska od zapremine (slika 1.18). Međutim, da bismo izračunali ovaj integral obavezno moramo znati *funkciju zavisnosti pritiska od zapremine u datom procesu,* $p = p(V)$

$$A = \int_1^2 p(V)dV. \tag{1.119}$$



Slika 1.17. *U cilindričnoj posudi s pokretnim klipom nalazi se idealan gas, kojem se dovodi toplota Q. Gas se, usljed zagrijavanja, širi i pomjera klip za dužinu dh, pri čemu se njegova zapremina poveća za dV.*



Slika 1.18. *Površina ispod grafika funkcije $p(V)$ predstavlja rad koji je izvršio gas pri promjeni zapremine od V_1 do V_2. Da bi bilo moguće izračunati taj rad potrebno je poznavati oblik funkcije $p(V)$.*

Dobivena jednačina vrijedi za bilo koju promjenu zapremine čvrstih tijela, tečnosti i gasova.

Uzmimo sada za primjer rad koji izvrši gas pri izo procesima. Zavisnost pritiska od zapremine se može dobiti iz jednačine stanja idealnog gasa kao $p(V) = \frac{n}{V}RT$. Ukoliko je proces izobarni, $p(V) = const$, te je rad koji izvrši gas:

$$A = \int_1^2 pdV = p\int_1^2 dV \tag{1.120}$$

što nakon integracije daje:

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \tag{1.121}$$

Za izotermni proces ($T = const$) rad će biti:

$$A = \int_1^2 pdV = \int_1^2 \frac{n}{V}RTdV, \tag{1.122}$$

$$A = nRT\int_1^2 \frac{dV}{V}, \tag{1.123}$$

$$A = nRT(\ln V_2 - \ln V_1), \tag{1.124}$$

$$A = nRTln\frac{V_2}{V_1}. \tag{1.125}$$

Pri izohornom procesu nema promjene zapremine tj. $dV = 0$, te nema ni vršenja rada ($A = 0$).

Iz gornjih izraza za rad, vidimo da je rad pozitivan ukoliko je došlo do širenja (ekspanzije) gasa, a negativan pri kompresiji gasa. Dogovoreno je da je rad koji izvrši gas pozitivan, a rad koji izvrši okolina nad gasom negativan.

1.5.3 Specifični toplotni kapacitet idealnog gasa

U poglavlju 1.1.7 naveli smo definicije specifične toplote i toplotnog kapaciteta. Rekli smo da je toplotni kapacitet nekog tijela veličina koja je brojno jednaka količini toplote koju treba predati tom tijelu da bi mu se temperatura povećala za jedan stepen. Specifični toplotni kapacitet neke supstance je veličina koja je brojno jednaka količini toplote koju treba predati jedinici mase te supstance da bi joj se temperatura povećala za jedan stepen.

Specifična toplota zavisi od načina na koji se gas zagrijava. Ako se zagrijavanje vrši pri konstantnoj zapremini, gas ne vrši nikakav mehanički rad, već se dovedena količina toplote, prema prvom zakonu termodinamike, utroši na promjenu njegove unutrašnje energije

$$\delta Q = dU. \tag{1.126}$$

S obzirom da se količina toplote može izraziti preko specifičnog toplotnog kapaciteta kao

$$\delta Q = mcdT, \tag{1.127}$$

u slučaju izohornog zagrijavanja dovedena količina toplote je jednaka

$$\delta Q = mc_V dT, \tag{1.128}$$

gdje je c_V **specifični toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini**. Iz gornjih relacija možemo izvesti definiciju za c_V

$$c_V = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}. \tag{1.129}$$

Uzimajući u obzir relaciju (1.110) c_V možemo izraziti preko broja stepeni slobode kao

$$c_V = \frac{j}{2}\frac{R}{M}. \tag{1.130}$$

Ukoliko se zagrijavanje gasa vrši pri konstantnom pritisku onda je dovedena količina toplote prema prvom zakonu termodinamike

$$\delta Q = \delta A + dU,$$

a pri takvom procesu izvršeni rad je dat jednačinom (1.121) što daje:

$$\delta Q = pdV + dU = d(pV) + dU,$$

$$\delta Q = d(pV + U).$$

Veličina na desnoj strani jednakosti $H = pV + U$, zavisi samo od stanja sistema i naziva se **entalpija,** H, te možemo reći da je dovedena količina toplote pri stalnom pritisku jednaka promjeni entalpije gasa

$$\delta Q = dH. \tag{1.131}$$

Entalpija se također može izraziti preko broja stepeni slobode kao:

$$H = U + pV = \frac{m}{M}\frac{j}{2}RT + \frac{m}{M}RT,$$

$$H = \frac{j+2}{2}\frac{m}{M}RT. \tag{1.132}$$

Ukoliko sada dovedenu količinu toplote pri stalnom pritisku izrazimo kao

$$\delta Q = mc_p dT, \tag{1.133}$$

možemo definisati veličinu c_p **koja predstavlja specifični toplotni kapacitet pri stalnom pritisku** i dobiva se kao

$$c_p = \frac{1}{m}\frac{dH}{dT}. \tag{1.134}$$

Specifični toplotni kapacitet pri stalnom pritisku izražen preko broja stepeni slobode iznosi

$$c_p = \frac{j+2}{2}\frac{R}{M}. \tag{1.135}$$

Povezujući jednačine (1.130) i (1.135) dobiva se veza između specifičnih toplotnih kapaciteta pri stalnoj zapremini i pritisku koja se naziva Majerova (njemački fizičar Julius Robert von Mayer) relacija

$$c_p - c_V = \frac{R}{M}. \tag{1.136}$$

Količnik c_p/c_V naziva se **adijabatska konstanta (eksponent)** i jednaka je

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{j+2}{j}. \tag{1.137}$$

1.5.4 Adijabatski proces

Adijabatski proces je proces koji se odvija bez razmjene toplote s okolinom tj. $\delta Q = 0$. Da bi to bilo moguće, oko gasa mora postojati omotač, koji uopšte ne propušta toplotu. Takav omotač se naziva adijabatski, a promjena stanja gasa unutar takvog omotača će biti adijabatska. Prema prvom zakonu termodinamike slijedi da je:

$$\delta Q = 0 = dU + \delta A,$$

što nakon uvrštavanja izraza za rad i promjenu unutrašnje energije daje:

$$mc_V dT + pdV = 0,$$

$$mc_V dT + \frac{m}{M}\frac{RT}{V}dV = 0,$$

pri čemu smo pritisak izrazili iz jednačine stanja idealnog gasa. Kad sad gornju relaciju podijelimo s mT i integriramo dobivamo:

$$\int c_V \frac{dT}{T} + \int \frac{R}{M}\frac{dV}{V} = 0,$$

$$c_V \ln T + \frac{R}{M}\ln V - \ln C = 0, \quad C = const.,$$

$$c_V \ln T + \frac{R}{M}\ln V = \ln C,$$

$$\ln T^{c_V} + \ln V^{R/M} = \ln C,$$

$$\ln\left(T^{c_V} V^{R/M}\right) = \ln C,$$

$$C = T^{c_V} V^{R/M}. \tag{1.138}$$

Količnik $\frac{R}{M}$ može se izraziti preko adijabatske konstante koristeći Majerovu relaciju kao:

$$\frac{R}{M} = c_p - c_v,$$

$$\frac{R}{M} = c_V\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right),$$

$$\frac{R}{M} = c_V\left(\varkappa - 1\right), \tag{1.139}$$

te integraciona konstanta C postaje

$$C = T^{c_V} V^{c_V(\varkappa-1)}. \tag{1.140}$$

Nakon što gornji izraz stepenujemo s $1/c_V$ i uzmemo u obzir da je C konstantna veličina, dobivamo konačnu jednačinu koja opisuje adijabatski proces:

$$C^{1/c_V} = TV^{\varkappa-1},$$

$$TV^{\varkappa-1} = const.. \tag{1.141}$$

Posljednja jednačina je jednačina **adijabate** idealnog gasa. Koristeći jednačinu stanja, jednačina adijabate se također može napisati u obliku

$$Tp^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = const. \tag{1.142}$$

odnosno kao

$$pV^{\varkappa} = const. \tag{1.143}$$

Ako posljednju jednačinu, koja se naziva **Poasonova jednačina** (francuski matematičar, inženjer i fizičar Siméon Denis Poisson), uporedimo s jednačinom izoterme $pV = const$ možemo zaključiti da je adijabata strmija od izoterme. To možemo dokazati određivanjem nagiba ove dvije krive, tj. određivanjem dp/dV u istoj tački (p, V). To ćemo postići diferenciranjem jednačina adijabate i izoterme. Za adijabatu vrijedi da je:

$$p\varkappa V^{\varkappa-1}dV + V^{\varkappa}dp = 0,$$

$$\frac{dp}{dV} = -\varkappa\frac{p}{V}, \tag{1.144}$$

a za izotermu

$$pdV + Vdp = 0,$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \tag{1.145}$$

Dakle, nagib adijabate je $\varkappa$ puta veći od nagiba izoterme, a njihovi uporedni grafički prikazi dati su na slici 1.19.

Rad koji se izvrši pri adijabatskom procesu možemo izračunati na osnovu činjenice da nema razmjene toplote s okolinom tj.

$$\delta A = -dU,$$

odnosno

$$pdV = -mc_V dT,$$

nakon integriranja od stanja 1 do stanja 2 dobivamo:

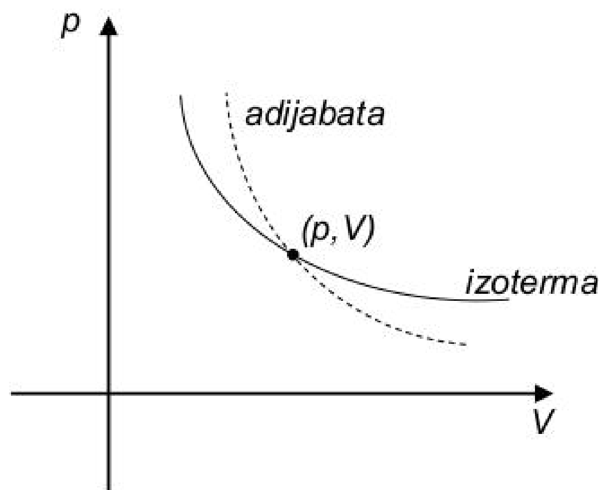
$$A_{12} = mc_V(T_1 - T_2) = mc_V T_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Kad temperaturu T_1 izrazimo iz jednačine stanja kao $T_1 = \frac{MpV}{mR}$, a odnos temperatura T_2/T_1 iz jednačine (1.142) izraz za rad postaje

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right], \tag{1.146}$$

ili izraženo preko odnosa zapremina iz jednačine (1.143)

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}\right]. \tag{1.147}$$



Slika 1.19. *Grafički prikaz zavisnosti pritiska od zapremine pri adijabatskom i izotermnom procesu. Tangens nagibnog ugla adijabate je $\varkappa$ puta veći od tangensa nagibnog ugla izoterme, posmatrano u istoj tački (p, V).*

1.5.5 Politropski proces

Svi procesi, koje smo do sada razmatrali su specijalni slučajevi politropskog procesa. Politropski procesi su svi procesi koji se odvijaju uz konstantan toplotni kapacitet. Jednačinu, koja opisuje politropski proces, možemo dobiti iz prvog zakona termodinamike:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

$$mcdT = mc_V dT + pdV,$$

$$mcdT = mc_V dT + \frac{mRT}{MV} dV.$$

Nakon razdvajanja promjenjivih i primjene Majerove relacije slijedi da je

$$\frac{dT}{T} = \frac{c_p - c_V}{c - c_V} \frac{dV}{V},$$

odnosno

$$\frac{dT}{T} = (1 - \eta) \frac{dV}{V},$$

$$\frac{dT}{T} + (\eta - 1) \frac{dV}{V} = 0,$$

pri čemu je $\eta = \frac{c_p - c}{c_V - c}$ **politropski eksponent** i može imati vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Nakon integracije slijedi da je:

$$\ln T + (\eta - 1) \ln V = \ln const.,$$

$$TV^{\eta-1} = const., \quad (1.148)$$

odnosno

$$pV^{\eta} = const.. \quad (1.149)$$

Posljednje dvije jednačine su jednačine politropskog procesa.

Dokažimo sada da su svi do sada pomenuti procesi specijalni slučajevi politropskog procesa:

- za izotermni proces vrijedi da je $c = \pm\infty$,pa politropski eksponent postaje $\eta = 1$, te jednačina politropskog procesa (1.149) prelazi u $pV = const.$ što predstavlja Bojl-Mariotov zakon za izotermni proces;
- za izobarni proces je $c = c_p$, pa politropski eksponent iščezava ($\eta = 0$), a jednačina (1.148) prelazi u $\frac{V}{T} = const.$ što predstavlja Gej-Lisakov zakon;
- za izohorni proces je $c = c_V$, što znači da je politropski eksponent $\eta = \pm\infty$, pa iz jednačina (1.149) i (1.148) slijedi da je $\frac{p}{T} = const.$ što predstavlja Šarlov zakon;
- za adijabatski proces je $c = 0$, pa politropski eksponent prelazi u adijabatski $\eta = \varkappa$ te jednačina (1.149) prelazi u $pV^{\varkappa} = const.$ što je jednačina adijabatskog procesa.

1.5.6 Drugi zakon termodinamike

Već smo ranije pomenuli da su termodinamički procesi zapravo prelaz sistema iz jednog stanja u drugo, što se ogleda u promjeni parametara stanja. Ukoliko se parametri stanja ne mijenjaju u toku vremena, sistem se nalazi u stacionarnom stanju. Poseban slučaj stacionarnog stanja je ravnotežno stanje. To je stanje koje se ne mijenja tokom vremena, pri čemu je sistem prepušten sam sebi. Proces koji se sastoji od neprekidnog niza ravnotežnih stanja naziva se **ravnotežni proces**.

Neka neki sistem dođe iz stanja 1 u stanje 2 prolazeći kroz niz različitih stanja. Ukoliko je moguće izvesti proces u obrnutom smjeru tj. od 2 do 1, tako da sistem prođe kroz ista stanja kao i u prvom slučaju, takav proces nazivamo **povratni ili reverzibilni**. U suprotnom, proces je **nepovratan ili ireverzibilan**. Realno gledano, svi toplotni procesi su ireverzibilni, međutim ponekad stepen nepovratnosti može da bude toliko mali da se može aproksimirati reverzibilnim procesom.

Ukoliko je neki proces ireverzibilan, to ne znači da se sistem ne može vratiti u početno stanje. Proces u kojem se sistem nakon niza različitih stanja vraća u početno stanje naziva se **kružni proces (ciklus)**. Nakon završenog ciklusa sistem se vraća u početno stanje, što znači da svaka veličina koja je funkcija stanja (npr. unutrašnja energija) ima istu vrijednost na početku i na kraju ciklusa. Međutim, općenito pri kružnom procesu rad nije jednak nuli.

Toplotna mašina

Sistem koji pretvara toplotnu energiju u mehaničku, koja može biti iskorištena za vršenje mahaničkog rada, naziva se **toplotna mašina**. Ona se sastoji od **toplog i hladnog rezervoara i radnog tijela**. Toplotni rezervoari su

termodinamički sistemi čiji je toplotni kapacitet toliko velik, da temperatura rezervoara ostaje ista kad mu se dovodi ili odvodi mala količina toplote. **Radno tijelo** je supstanca (najčešće gas) koja se podvrgava raznim procesima koji uzrokuju njeno širenje i sabijanje.

Da bismo razumjeli kako radi toplotna mašina zamislimo cilindar s pokretnim klipom u kojem se nalazi gas (radno tijelo). Gas apsorbuje toplotu iz toplog rezervoara te šireći se adijabatski, vrši rad protiv vanjskih sila, tj. dolazi do pretvaranja unutrašnje energije u mehaničku. To pretvaranje prestaje kad se prekine širenje gasa. S obzirom da su dimenzije cilindra konačne, širenje gasa ne može biti neograničeno. Da bi ponovo došlo do širenja gasa, tj. do ponovnog vršenja rada, potrebno je gas sabiti tako što dovedemo i klip i gas u početno stanje. To sabijanje mora da se odvija pri manjem pritisku od onog na kojem se odvijalo širenje, jer ukoliko bi se sabijanje odvijalo pri istom pritisku, rad vanjskih sila bi bio jednak radu pri širenju, te bi ukupan rad bio jednak nuli ($\delta A = pdV$). Dakle, da bi rad u jednom ciklusu bio različit od nule potrebno je da se radno tijelo (gas) sabija na nižem pritisku, a to je moguće samo ako mu je temperatura niža. To znači da prije sabijanja radno tijelo mora doći u kontakt s hladnim rezervoarom da bi mu predao određenu količinu toplote.

Na osnovu gore navedenog, možemo toplotnu mašinu predstaviti šematski kao na slici 1.20. Zajedničke karakteristike svih toplotnih mašina su:

- rad u ciklusima (periodično se vraća u početno stanje),
- radno tijelo, kroz niz procesa, dobiva toplotu Q_1 od toplog rezervoara koji je na visokoj temperaturi T_1,
- kroz niz procesa, manja količina toplote Q_2 se predaje rezervoaru niže temperature T_2.

Q_1 je količina toplote koja se dovodi iz okoline. Da bi mašina radila u ciklusima, **jedan dio te toplote se mora vratiti u okolinu (Q_2)**, tj. ne može se utrošiti na koristan rad. Razlika između dovedene i odvedene količine toplote jednaka je korisnom radu koji izvrši mašina u jednom ciklusu:

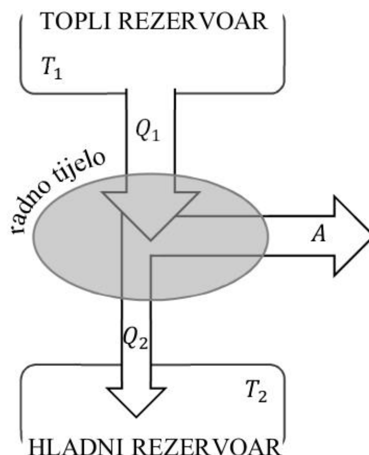
$$A = Q_1 - |Q_2|\,, \tag{1.150}$$

pri čemu je $Q_2 < 0$. Odnos korisnog rada u toku jednog ciklusa i dovedene količine toplote u toku tog ciklusa naziva se **koeficijent korisnog dejstva toplotne mašine (koeficijent iskorištenja)**:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \tag{1.151}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \tag{1.152}$$

Dakle, koeficijent korisnog dejstva je uvijek manji od jedan. Da bi bilo $\eta = 1$, potrebno je da je $Q_2 = 0$, tj. da mašina radi samo s jednim izvorom toplote, što je nemoguće. To je prvi otkrio francuski naučnik Sadi Karno (Nicolas Léonard Sadi Carnot), koji je dokazao da toplotna mašina za vršenje rada mora imati najmanje dva rezervoara toplote na različitim temperaturama.



Slika 1.20. *Šematski prikaz toplotne mašine. Topli rezervoar, temeprature T_1, predaje toplotu Q_1 radnom tijelu, koje šireći se vrši rad A protiv vanjskih sila. Nakon toga radno tijelo predaje toplotu Q_2 hladnom rezervoaru temperature T_2 i sabija se, čime je završen jedan ciklus rada toplotne mašine.*

Toplotna pumpa

Toplotne pumpe (hladnjaci, mašine za hlađenje) prenose toplotu s hladnijeg na toplije tijelo uz utrošak rada. Uzmimo za primjer frižider. Hrana u frižideru predstavlja hladni rezervoar, a zrak oko frižidera predstavlja topli rezervoar. Elektromotor vrši rad. U toku ciklusa radno tijelo prima količinu toplote $Q_2 > 0$ od hladnog rezervoara, a količinu toplote Q_1 predaje toplom rezervoaru. Drugim riječima, uzima toplotu od hladnijeg tijela i predaje je toplijem. S obzirom da je $Q_2 < Q_1$ (hladni rezervoar je na nižoj temperaturi od toplog) onda je $Q_2 - Q_1 = -A$ tj. $Q_1 = Q_2 + A$. **To znači da se bez vršenja rada ne može oduzeti toplota hladnijem tijelu i predati toplijem.** Količina toplote predata toplom rezervoaru, veća je od količine toplote uzete od hladnog rezervoara, za veličinu rada koji je izvršen nad sistemom. U tom slučaju koeficijent korisnog dejstva je veći što je veća količina odvedene toplote Q_2 i što je manji izvršeni rad pri tom procesu. Dakle, koeficijent korisnog dejstva toplotne pumpe se može izračunati kao

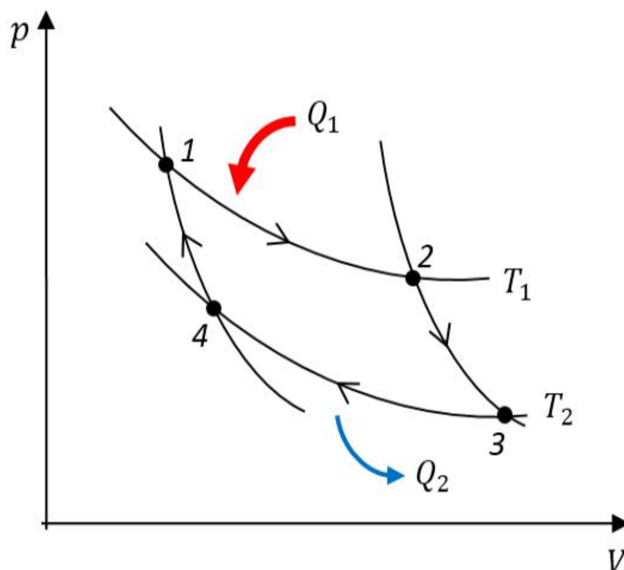
$$K = \frac{Q_2}{A} = \frac{1}{\eta} - 1, \tag{1.153}$$

pri čemu je očito da K može biti i manji i veći od jedan, pa čak i jednak nuli.

Drugi zakon termodinamike

Sada smo uveli sve potrebne pojmove i eksperimentalne činjenice, koje će nam pomoći da definišemo drugi zakon termodinamike. Postoji više formulacija:

- Kelvin-Plankova: *Nemoguć je takav proces, koji bi imao kao posljedicu oduzimanje toplote od jednog jedinog rezervoara uz vršenje ekvivalentne*



Slika 1.21. *Grafički prikaz Karnoovog kružnog procesa. Procesi* $1 \to 2$ *i* $3 \to 4$ *su izotermni i dešavaju se na temperaturama* T_1 *odnosno* T_2*, a procesi* $2 \to 3$ *i* $4 \to 1$ *su adijabatski.*

količine rada. Ova formulacija proizilazi iz činjenice da nije moguće napraviti toplotnu mašinu, koja bi u periodičnom ciklusu svu dovedenu toplotu pretvarala u mehanički rad. To bi bio *perpetuum mobile druge vrste.* (njemački fizičar Max Karl Ernst Ludwig Planck)

- Klausijusova: *Nije moguć proces, koji bi imao za posljedicu samo uzimanje toplote od jednog rezervoara na nižoj temperaturi i apsorpciju iste količine toplote na nekoj višoj temperaturi.* Ova formulacija proizilazi iz zaključka da toplota ne može spontano da prelazi s hladnijeg na toplije tijelo tj. bez vršenja rada ne može se oduzeti toplota hladnijem tijelu i predati toplijem. (njemački naučnik Rudolf Julius Emanuel Clausius)

Karnoov kružni proces

Na osnovu proučavanja rada toplotnih mašina, Karno je zaključio je da će koeficijent korisnog dejstva biti maksimalan, ako radno tijelo prima i odaje toplotu na stalnoj temperaturi, a da mu se temperatura mijenja samo u procesu vršenja rada. Predložio je **ciklus idealne toplotne mašine, koji se sastoji od dvije izoterme i dvije adijabate** prikazane na slici 1.21.

Koeficijent korisnog dejstva Karnoovog ciklusa je

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \tag{1.154}$$

što znači da efikasnost mašine *ne zavisi od radnog tijela već samo od odnosa temperatura hladnog i toplog rezervoara.* Karno je dokazao da *nijedna toplotna mašina ne može biti efikasnija od Karnoove mašine za iste temperature toplog i hladnog rezervoara,* što se naziva **Karnoova teorema**. Ona se može izraziti

i na drugi način: ako dvije mašine rade tako da imaju zajedničke toplotne rezervoare, pri čemu je ciklus jedne mašine reverzibilan a druge ireverzibilan, onda je koeficijent korisnog dejstva mašine koja vrši reverzibilan proces veći:

$$\eta_{irev} \leq \eta_{rev}. \tag{1.155}$$

1.5.7 Entropija - treći zakon termodinamike

Da bi bilo moguće matematički izraziti drugi zakon termodinamike potrebno je uvesti novu veličinu koja bi bila funkcija stanja sistema (ta veličina ne može biti unutrašnja energija sistema jer je konstantna u izolovanim sistemima). Tu veličinu prvi je definisao Klasius i nazvao ju je **entropija**. Ona je definisana samo za ravnotežna stanja.

Upoređujući koeficijent korisnog dejstva Karnoove mašine s definicijom koeficijenta korisnog dejstva toplotne mašine, izražene relacijom (1.152), uočavamo da važi odnos

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

odnosno

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}. \tag{1.156}$$

Odnos količine toplote koju sistem dobije i temperature na kojoj je tu toplotu dobio naziva se **redukovana količina toplote**. Gornju relaciju možemo napisati i kao sumu redukovanih toplota:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \tag{1.157}$$

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0. \tag{1.158}$$

U slučaju proizvoljnog reverzibilog ciklusa, znak sume treba zamijeniti integralom po zatvorenoj konturi (obuhvata sva stanja kroz koja je prošao sistem u jednom ciklusu):

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \tag{1.159}$$

Pretpostavimo sada da je moguć reverzibilni prelaz sistema iz početnog stanja 1 u krajnje stanje 2. Neka se taj prelaz vrši po različitim "putanjama" a i b (tj. preko različitih stanja). Može se dokazati da je

$$\left(\int_1^2 \frac{dQ}{T} \right)_a = \left(\int_1^2 \frac{dQ}{T} \right)_b, \tag{1.160}$$

što znači da suma redukovanih toplota za reverzibilne prelaze zavisi samo od početnog i krajnjeg stanja sistema, ali ne i od procesa kroz koje je prošao sistem. Dakle, postoji neka funkcija stanja S za koju važi da je

$$S_2 - S_1 = \Delta S \geq \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}, \tag{1.161}$$

pri čemu se uzima znak jednakosti za reverzibilne procese, a znak $>$ za ireverzibilne procese

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_{rev}}{T}, \quad \Delta S > \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_{irev}}{T}. \tag{1.162}$$

Ta funkcija se naziva **entropija sistema**. Jednačina (1.161) predstavlja matematičku formulaciju drugog zakona termodinamike. Entropija je aditivna veličina, tj. entropija sistema jednaka je sumi entropija njegovih pojedinih dijelova.

Ukoliko jednačinu (1.161) napišemo u diferencijalnom obliku kao $TdS \geq \delta Q$ i to uvrstimo u prvi zakon termodinamike, $\delta Q = dU + A$, dobivamo

$$TdS \geq dU + A, \tag{1.163}$$

što predstavlja osnovnu jednačinu koja obuhvata i prvi i drugi zakon termodinamike. Ako je sistem toplotno izolovan, onda je $\Delta S \geq 0$. Znači da **entropija izolovanog sistema može samo da raste (u slučaju ireverzibilnih procesa u sistemu) ili da ostaje konstantna (u slučaju reverzibilnih procesa u sistemu)**. Drugim riječima **u toplotno izolovanim sistemima entropija ne može da opada**. Ovo je ujedno i formulacija drugog zakona termodinamike preko entropije.

Relacijom (1.161) je određena samo razlika entropija. Da bismo odredili vrijednost entropije u nekom proizvoljnom stanju, koristit ćemo **Nernstovu teoremu** (njemački hemičar Walther Hermann Nernst), koja glasi: **kada apsolutna temperatura teži nuli, entropija proizvoljnog tijela također teži nuli**

$$\lim_{T \to 0} S = 0. \tag{1.164}$$

Nernstova teorema se često naziva i **treći zakon termodinamike** prema kojem je entropija tijela u bilo kojem stanju s temperaturom T jednaka

$$S = \int_{0}^{T} \frac{\delta Q}{T}. \tag{1.165}$$

Poglavlje 2

Optika

Optika je dio fizike koja se bavi proučavanjem svojstava i zakonitosti nastajanja, te širenja i fizikalnog djelovanja svjetlosti, kao i konstrukcijom optičkih instrumenata. Može se podijeliti na fotometriju, geometrijsku i fizičku (talasnu) optiku. Fotometrija je grana optike, koja se bavi mjerenjem svojstava svjetlosti (svojstava izvora svjetlosti, svjetlosnog toka i osvjetljenja površine). Geometrijska optika opisuje prostiranje svjetlosti, tretirajući je kao svjetlosne zrake čija se putanja pokorava zakonima odbijanja i prelamanja na granicama između dvije sredine. Fizička optika razmatra prostiranje svjetlosti kao prostiranje transverzalnog elektromagnetnog (EM) talasa.

Svjetlost ima dualnu prirodu - čestičnu (korpuskularnu) i talasnu (EM talas). Prostiranje svjetlosti se najbolje može objasniti njenom elektromagnetnom prirodom, a njeno međudjelovanje s materijom (apsorpcija, emisija) čestičnom prirodom.

2.1 Fotometrija

Svjetlosni izvori su tijela koja emituju (zrače) svjetlost. Mogu biti *inkadescentni* (oni koji emituju svjetlost kad su zagrijani - užarena nit) i *luminiscentni* (koji emituju svjetlost i kad nisu zagrijani). Dio fizike koji se bavi proučavanjem karakteristika svjetlosnih izvora i kvantitativnih karakteristika svjetlosnih pojava naziva se **fotometrija**. Fotometrijske veličine se dijele na **objektivne (fizičke)** i **subjektivne (fiziološke)**. Objektivne veličine ne zavise od spektralnih karakteristika svjetlosti niti od osobina oka i one karakterišu elektromagnetno zračenje. U objektivne veličine spadaju energetski fluks, energetska jačina zračenja (intenzitet zračenja), ozračenost (iradijancija), površinska gustoća zračenja (radijancija) i emitancija. Subjektivne veličine su prilagođene fiziološkim osobinama oka. Ovdje ćemo se baviti samo subjektivnim veličinama fotometrije.

1. **Svjetlosni fluks,** Φ, je snaga svjetlosnog zračenja, odnosno količina svjetlosti koju neki izvor izrači u jedinici vremena. Jedinica za svjetlosni fluks je lumen, lm.

2. **Intenzitet svjetlosti,** I, je brojno jednak svjetlosnom fluksu, koji se emituje u jedinični prostorni ugao. Jedinica za intenzitet (jačinu) svjetlosti je

kandela, cd:

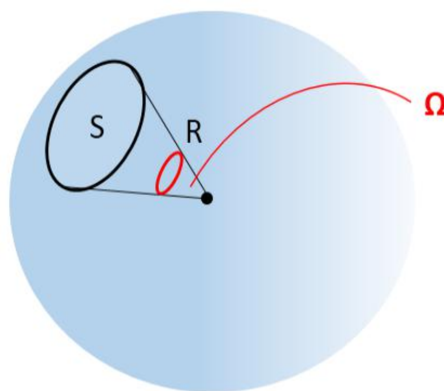
$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}\,[\mathrm{cd}]\,. \tag{2.1}$$

Ukoliko je svjetlosni izvor **izotropan**, tj. jačina svjetlosti u svim pravcima je jednaka, onda je

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \tag{2.2}$$

Prostorni ugao je fizikalna veličina, koja opisuje koliki je dio prostora zahvaćen vrhom kupe (vidi sliku 2.1). Definiše se kao odnos dijela površine kugle S, koju kupa s vrhom u centru kugle, omeđuje na kuglinoj površini i kvadrata poluprečnika kugle R:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}. \tag{2.3}$$



Slika 2.1. *Prostorni ugao predstavlja odnos dijela površine kugle S, koju kupa, s vrhom u centru kugle, omeđuje na kuglinoj površini i kvadrata poluprečnika kugle R.*

Jedinica za prostorni ugao je **steradijan**, sr. To je prostorni ugao, čiji se vrh nalazi u centru kugle, a na kugli isjeca površinu (proizvoljnog oblika) jednaku kvadratu poluprečnika kugle. Pošto je ukupna površina kugle $4\pi R^2$, očito je da je puni prostorni ugao oko neke tačke 4πsr. Ukupan svjetlosni fluks za **tačkaste izotropne izvore** je onda jednak:

$$\Phi_0 = I\Omega_0 = I4\pi. \tag{2.4}$$

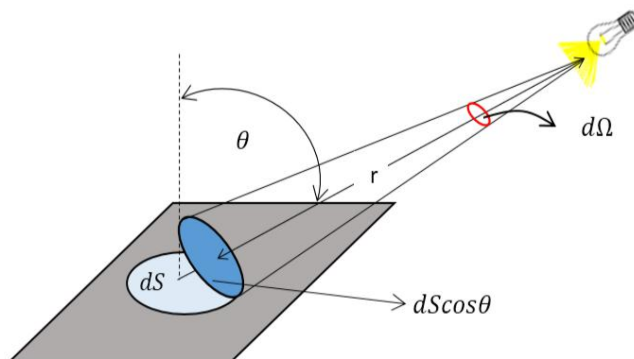
jer tačkasti izvori emituju svjetlost u svim pravcima, tj. u puni prostorni ugao, koji je ovdje označen kao Ω_0.

3. **Osvijetljenost** neke površine brojno je jednaka svjetlosnom fluksu koji prolazi kroz neku površinu:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}, \tag{2.5}$$

a ako je osvijetljenost svake tačke na površini ista, onda je

$$E = \frac{\Phi}{S}, \tag{2.6}$$



Slika 2.2. *Svjetlost, iz inkadescentnog izvora, pada na površinu dS pod uglom θ. Ugao $d\Omega$ je prostorni ugao unutar kojeg se posmatra svjetlosni snop, a $dS\cos\theta$ baza konusa koji zatvara taj prostorni ugao.*

pri čemu svjetlost pada okomito na tu površinu. Mjerna jedinica za osvijetljenost je luks, lx. Osvijetljenost nekog malog dijela površine (slika 2.2) na koju pada svjetlost, može se dobiti na slijedeći način:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I d\Omega}{dS} = \frac{I \frac{dS\cos\theta}{R^2}}{dS}, \tag{2.7}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2}. \tag{2.8}$$

Ova relacija predstavlja **Lambertov zakon** (švicarski naučnik Johann Heinrich Lambert) koji pokazuje da osvijetljenost neke površine opada sa kvadratom njenog rastojanja od izvora. Ukoliko element površine dS teži nuli, relaciju (2.8) možemo koristiti za određivanje osvijetljenosti u nekoj tački A, prikazanoj na slici 2.3, pri čemu je onda r udaljenost te tačke od izvora svjetlosti, a ugao θ ugao između pravca prostiranja svjetlosti (svjetlosne zrake) i normale na površinu na kojoj leži ta tačka. Osvijetljenost u tački, koja leži tačno ispod izvora, kao npr. tačka B na slici 2.3 je

$$E = \frac{I}{h^2}, \tag{2.9}$$

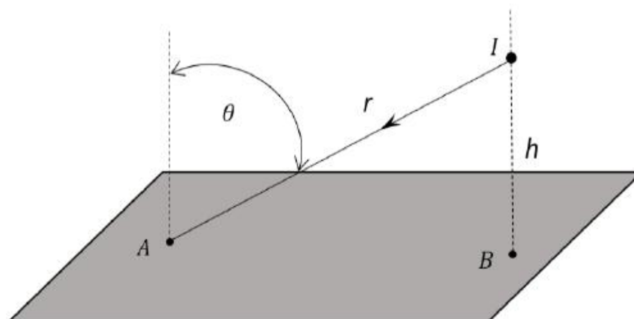
jer je ugao θ između zrake, koja ide prema tački B i normale u toj tački, jednak nuli tj. $\cos 0 = 1$, a h je visina na kojoj se nalazi izvor u odnosu na posmatranu površinu.

4. **Osvijetljaj** je brojno jednak svjetlosnom fluksu koji emituje neka površina.

5. **Sjaj** je površinska gustina zračenja svjetlosti u određenom smjeru.

2.2 Geometrijska optika

Geometrijska optika tretira svjetlost kao zrake, koje izlaze iz svjetlosnog izvora i šire se u prostoru prema osnovnim zakonima geometrijske optike:



Slika 2.3. *Osvijetljenost u nekoj tački zavisi od jačine svjetlosti, rastojanja svjetlosnog izvora od posmatrane tačke i ugla između svjetlosne zrake i normale na površinu na kojoj se nalazi ta tačka.*

- **zakon pravolinijskog prostiranja svjetlosti**,
- **zakon nezavisnosti prostiranja svjetlosnih zraka**,
- **zakon odbijanja (refleksije) svjetlosti**,
- **zakon prelamanja (refrakcije) svjetlosti**.

Mnoge pojave, koje možemo opaziti u svakodnevnom životu, upućuju na činjenicu da se svjetlost prostire pravolinijski u homogenoj sredini. Jedna od njih je postojanje sjene. Naime, ako na neko čvrsto neprozirno tijelo pada svjetlost, ona ne može da prođe kroz tijelo niti da ga zaobiđe, te se na zastoru pojavi sjena tog tijela. S druge strane, ukoliko svjetlosne zrake pri svom prostiranju naiđu jedna na drugu, ne dolazi do njihovog međudjelovanja, tj. nastavit će se kretati nezavisno jedna od druge.

Francuski matematičar Fermat (Pierre de Fermat) dokazao je da svjetlost pri svom prostiranju, između dvije tačke u prostoru, "bira" onaj put, za koji je potrebno najkraće vrijeme. Dakle, svjetlost pri svom kretanju uvijek bira najbrži put (najbrži nije nužno i najkraći!). Ovaj princip se naziva **princip ekstrema vremena** ili **Fermatov princip**. Vrijeme potrebno da svjetlost dođe iz tačke 1 u tačku 2 je na osnovu zakona puta pravolinijskog kretanja ($ds = vdt$)

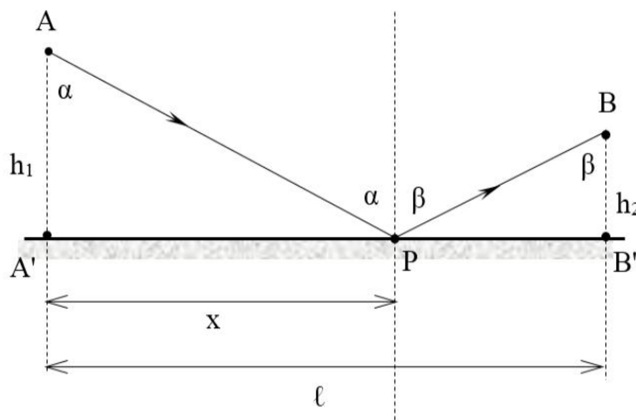
$$t = \int_1^2 \frac{ds}{v}. \tag{2.10}$$

Brzinu svjetlosti u nekoj sredini v, možemo izrazi preko **apsolutnog indeksa prelamanja** n. On pokazuje koliko puta je brzina svjetlosti u vakuumu (c), veća od njene brzine u nekoj sredini (v):

$$n = \frac{c}{v}, \tag{2.11}$$

odakle je

$$v = \frac{c}{n}. \tag{2.12}$$



Slika 2.4. *Odbijanje svjetlosti od uglačanu površinu u tački P. Tačke A i B se nalaze na različitim visinama h_1 i h_2 i na međusobnom rastojanju ℓ. α je upadni ugao, a β odbojni.*

Kad ovako izraženu brzinu svjetlosti uvrstimo u jednačinu (2.10) dobivamo:

$$t = \int_1^2 \frac{nds}{c} = \frac{1}{c}\int_1^2 nds = \frac{1}{c}L. \tag{2.13}$$

S obzirom da vrijeme kretanja od tačke 1 do tačke 2 mora biti najkraće moguće, potrebno je da veličina

$$L = \int_1^2 nds = ns \tag{2.14}$$

bude minimalna. Ova veličina se naziva **optička dužina puta** i jednaka je proizvodu geometrijske dužine puta, s i apsolutnog indeksa prelamanja, n, sredine kroz koju se svjetlost prostire. Na osnovu ove činjenice, možemo zaključiti da se *svjetlost kreće po putu s najmanjom optičkom dužinom.*

2.2.1 Zakon odbijanja svjetlosti

Za odbijanje i prelamanje svjetlosti važe isti zakoni kao i za mehaničke talase. Dakle, zakon odbijanja svjetlosti glasi:
Svjetlost se odbija tako da je upadni ugao (α) jednak odbojnom (β) pri čemu upadna zraka, odbijena zraka i normala leže u istoj ravni.
S obzirom da je upadni ugao jednak odbojnom, onda vrijedi i da je:

$$\sin\alpha = \sin\beta. \tag{2.15}$$

Koristeći definiciju funkcije sinus u pravouglom trouglu, a na osnovu slike 2.4, relacija (2.15) postaje:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}} = \frac{(\ell - x)}{\sqrt{(\ell-x)^2+h_2^2}}. \tag{2.16}$$

S druge strane, da bismo izveli zakon odbijanja koristeći Fermatov princip razmotrimo svjetlosnu zraku na istoj slici 2.4. Ona kreće iz tačke A i dolazi

u tačku B pri čemu se reflektuje u tački P. Neka je ℓ horizontalna udaljenost tačaka A i B, a neka je x horizontalna udaljenost tačaka A i P. Put koji pređe svjetlost od A do B je $s = \overline{AP} + \overline{PB}$, a vrijeme potrebno da pređe taj put se može dobiti dijeljenjem pređenog puta s brzinom prostiranja svjetlosti c (jer se svjetlost kreće ravnomjerno pravolinijski):

$$t = \frac{s}{c} = \frac{\overline{AP}}{c} + \frac{\overline{PB}}{c}. \tag{2.17}$$

Sa slike 2.4 se vidi da su $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$ hipotenuze trouglova $AA'P$ i $BB'P$, te na osnovu Pitagorine teoreme slijedi

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c}. \tag{2.18}$$

Da bi odredili kolika mora biti dužina x, takva da je vrijeme kretanja minimalno, potrebno je pronaći prvi izvod vremena po x i izjednačiti ga s nulom:

$$\frac{dt}{dx} = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{1}{c}\frac{2(\ell - x)(-1)}{2\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}} = 0,$$

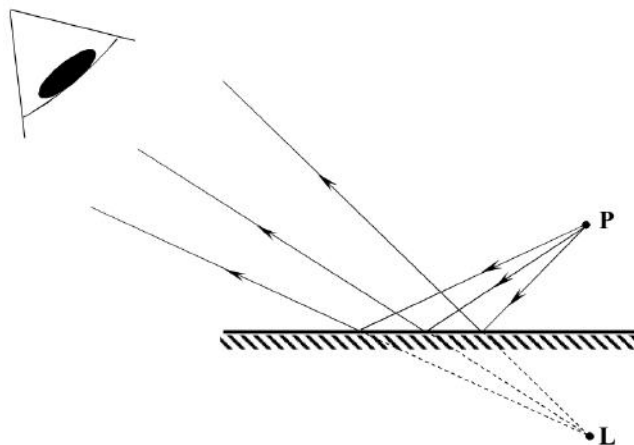
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(\ell - x)}{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}.$$

Dobiveni izraz je identičan izrazu (2.16), te zaključujemo da je

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \text{odnosno} \quad \alpha = \beta.$$

2.2.2 Ogledala

Svjetlost se najbolje odbija od uglačane površine. Ona se može odbiti i od neuglačane površine, ali u raznim pravcima. Razlog je položaj i orijentacija onog malog dijela površine na koji pada svjetlosna zraka. Takvo odbijanje se naziva difuzno ili neregularno, dok se odbijanje od uglačanu površinu, npr. od ogledalo, naziva regularno. Ogledalo je svaka uglačana metalna i metalizirana staklena površina koja pravilno odbija svjetlost. Prema svom obliku ogledala mogu biti ravna i sferna. Razmotrit ćemo stvaranje lika za obje vrste ogledala, ali prije toga potrebno je objasniti šta je zapravo *predmet*, a šta *lik* nekog predmeta. Oko vidi predmete tako što se svjetlost odbije od predmet, dođe do oka i izaziva osjećaj viđenja. Postoje i predmeti koji sami emituju svjetlost (Sunce, vlakno sijalice i sl.). Oni izazivaju osjećaj viđenja vlastitom svjetlošću. U oba slučaja tijela koja zrače svjetlost nazivaju se **svijetli predmeti**. Ljudsko oko vidi svijetle predmete preko svjetlosnih zraka koje dolaze direktno s posmatranog predmeta, odnosno kad se one prostiru pravolinijski. Međutim, ako iz bilo



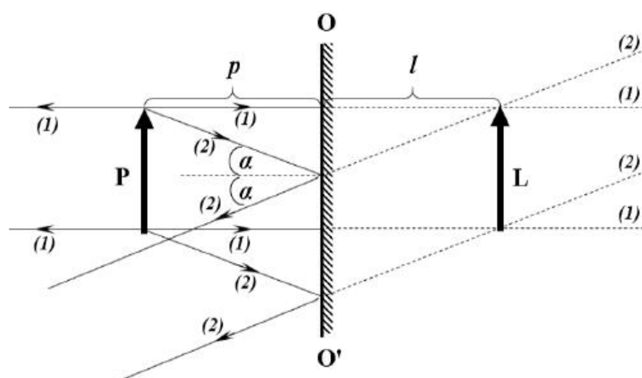
Slika 2.5. *Oko vidi predmet u produžecima zraka koje, s predmeta P, dolaze do njega. Ukoliko su zrake divergentne (tj. ne sijeku se), oko "traži" njihov presjek u produžetku, te na tom mjestu "vidi" lik, L, tog predmeta. Dakle, formiranje lika L zavisi od osjećaja viđenja, što znači da je taj lik imaginaran.*

kojeg razloga zrake, koje polaze s predmeta, skrenu sa svog pravca prije nego što dospiju u oko (slika 2.5), onda je osjećaj viđenja donekle izmijenjen. Pri tome se ne misli na promjenu u osnovnom principu viđenja, nego na promjenu mjesta i veličine predmeta. U ovom slučaju osjećaj viđenja naziva se **lik** predmeta. On odstupa po položaju i po veličini od normalnog opisanog slučaja viđenja. Zbog toga se ovakav lik naziva **imaginaran (virtuelan)** i njegovo obrazovanje vezano je za svojstva oka. Postoje i **realni likovi**, koji se obrazuju bez obzira na svojstvo viđenja.

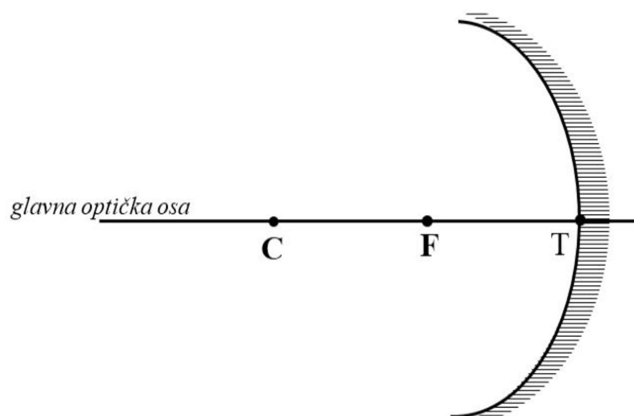
1° **Ravno ogledalo**

Ravno ogledalo je uglačana površina čiji poluprečnik zakrivljenosti teži u beskonačnost ($R \to \infty$). Neka se ispred ravnog ogledala OO' nalazi svijetli predmet visine P (slika 2.6). S obzirom da je predmet ravan, njegov lik je moguće dobiti preslikavanjem samo gornjeg i donjeg njegovog ruba. Za formiranje lika potrebne su najmanje dvije zrake. Zrake se mogu izabrati proizvoljno. Neka s vrha i dna predmeta polaze zrake (1) i (2) prema ogledalu. Zraka (1) pada okomito na ogledalo, te se odbija u istom pravcu, što je u saglasnosti sa zakonom odbijanja. Zraka (2) pada na ogledalo pod upadnim uglom α, te se odbija pod istim uglom. Odbijene zrake se ne sijeku. U tom slučaju lik ovog predmeta nije realan i nalazi se u produžetku odbijenih zraka. Dakle, lik predmeta, koji se dobije ravnim ogledalom, je imaginaran, uspravan i nalazi se "s druge strane" ogledala i jednake je visine kao i predmet ($L = P$). Udaljenost predmeta od ogledala (p) jednaka je udaljenosti lika od ogledala (ℓ). Može se reći da su predmet i lik simetrični u odnosu na ogledalo.

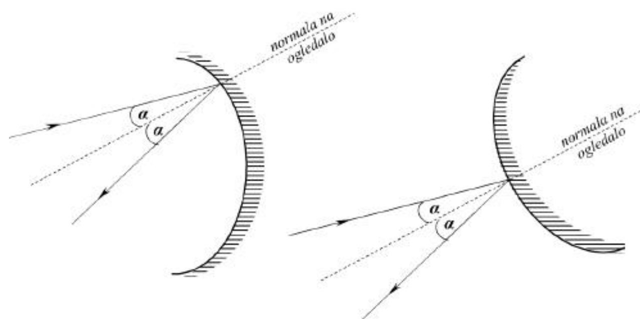
2° **Sferno ogledalo**



Slika 2.6. *Formiranje lika nekog predmeta na ravnom ogledalu. Dobijeni lik je imaginaran, uspravan, jednake visine kao i predmet* ($L = P$) *i jednako udaljen od ogledala kao i predmet* ($\ell = p$).



Slika 2.7. *Karakteristične tačke sfernog ogledala su centar zakrivljenosti* (C), *žiža ili fokus* (F) *i tjeme* (T). *Linija koja prolazi kroz centar zakrivljenosti i tjeme ogledala je glavna optička osa.*



Slika 2.8. *Zakon odbijanja svjetlosti važi za svaku površinu, bila ona kriva ili ravna.*

Sferno ogledalo je dio sferne površine, obrađene tako da može regularno odbijati svjetlost. Ono može biti **udubljeno (konkavno)** ili **ispupčeno (konveksno)**. Karakteristične tačke sfernog ogledala su **centar zakrivljenosti** (C), **glavna žiža ili fokus** (F) i **tjeme** (T) i prikazane su na slici 2.7. Centar zakrivljenosti je centar zamišljene sfere na joj bi se nalazilo ogledalo, a tjeme je tačka koja se nalazi na sredini ogledala. Linija koja prolazi kroz centar zakrivljenosti i tjeme ogledala naziva se **glavna optička osa**. Glavna žiža je tačka na glavnoj optičkoj osi u kojoj se, nakon odbijanja od ogledalo, sijeku sve zrake koje su prije odbijanja bile paralelne s optičkom osom. Ona može biti realna ili imaginarna zavisno od toga da li se u njoj zaista sijeku reflektovane zrake ili pak produžeci reflektovanih zraka. Udaljenost od centra zakrivljenosti do tjemena ogledala predstavlja **poluprečnik krivine** ogledala, $\overline{CT} = R$, a udaljenost od žiže do tjemena ogledala **žižna daljina**, $\overline{FT} = f$. Žižna daljina je jednaka polovini poluprečnika:

$$f = \frac{R}{2}. \tag{2.20}$$

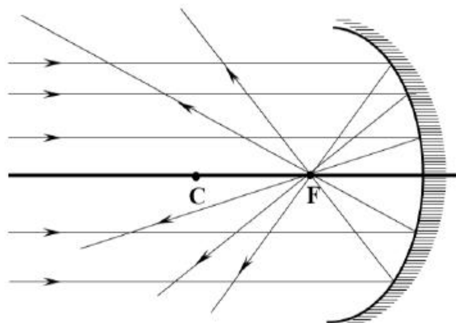
Normala na sferno ogledalo prolazi kroz centar zakrivljenosti ogledala C, tj. prostire se duž poluprečnika, zbog činjenice da je poluprečnik uvijek okomit na kružnicu.

Bez obzira o kakvoj se površini radi (ravna ili kriva), važi zakon odbijanja svjetlosti. Kad svjetlosna zraka padne na neku površinu, ona pogađa veoma mali dio te površine. Taj mali dio površine se može, u svakom slučaju, smatrati ravnim. Dakle, kad svjetlosna zraka padne na neku tačku krive površine pod uglom α, odbit će se pod istim uglom (slika 2.8).

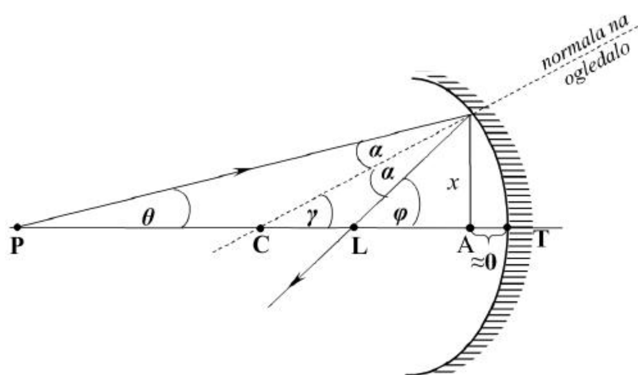
a) **Konkavno ogledalo**

Konkavno ogledalo ima takvo svojstvno da sve zrake, koje na njega padaju paralelno s optičkom osom, odbija tako da one prođu kroz žižu ogledala (slika 2.9) (ukoliko je otvor ogledala mali!). To znači da je žiža konkavnog ogledala realna.

Na slici 2.10 je prikazano formiranje lika tačkastog predmeta (P) na konkavnom ogledalu. Za formiranje lika potrebne su najmanje dvije zrake. S obzirom da se zrake mogu izabrati proizvoljno, uzet ćemo da se jedna zraka prostire duž optičke ose (ona se nakon odbijanja vraća istim pravcem), a drugu ćemo iza-



Slika 2.9. *Sve zrake koje padaju na konkavno ogledalo paralelno s optičkom osom, odbijaju se tako da prođu kroz žižu ogledala.*



Slika 2.10. *Formiranje lika predmeta na konkavnom ogledalu.* $\overline{AT}$ *je približno jednaka nuli (jer su izabrani uglovi mali), tako da svjetlosna zraka pada vrlo blizu tjemena ogledala. Normala na sferno ogledalo prolazi kroz centar zakrivljenosti (C), zbog činjenice da je polupréčnik uvijek okomit na kružnicu.*

brati proizvoljno. Lik (L) će se nalaziti na presjeku odbijene zrake i optičke ose. Udaljenost prdmeta od tjemena ogledala označena je s p, a udaljenost lika od tjemena s ℓ. Sa slike 2.10 se vidi da su tangensi označenih uglova jednaki:

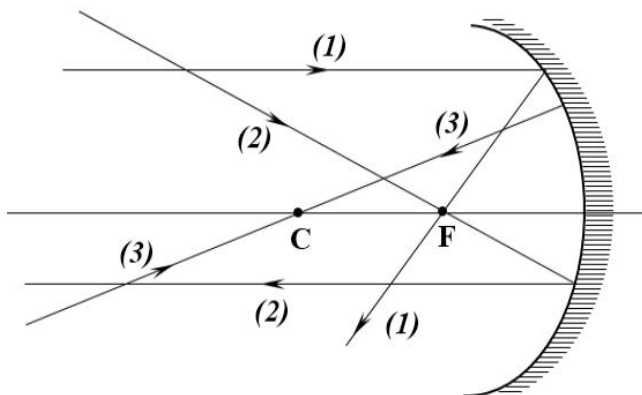
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{x}{p - \overline{AT}}, \quad \mathrm{tg}\gamma = \frac{x}{R - \overline{AT}}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{x}{\ell - \overline{AT}}.$$

Budući da su zrake izabrane proizvoljno svi uglovi se mogu smatrati malim uglovima (tj.$< 6°$), te su onda tangensi uglova približno jednaki tim uglovima, a dužina $\overline{AT}$ se može zanemariti, pa dobijamo:

$$\theta = \frac{x}{p}, \quad \gamma = \frac{x}{R}, \quad \varphi = \frac{x}{\ell}. \tag{2.21}$$

Poznato je iz geometrije, da je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja suprotna ugla, na osnovu čega se može pisati:

$$\gamma = \theta + \alpha \quad i \quad \varphi = \gamma + \alpha \Rightarrow \alpha = \varphi - \gamma, \tag{2.22}$$



Slika 2.11. *Tri karakteristične zrake konkavnog ogledala.*

te slijedi da je:

$$\gamma = \theta + \varphi - \gamma, \tag{2.23}$$

$$\theta + \varphi = 2\gamma. \tag{2.24}$$

Nakon uvrštavanja jednačina (2.21) i (2.20) u jednačinu (2.24) dobija se **jednačina konkavnog ogledala**:

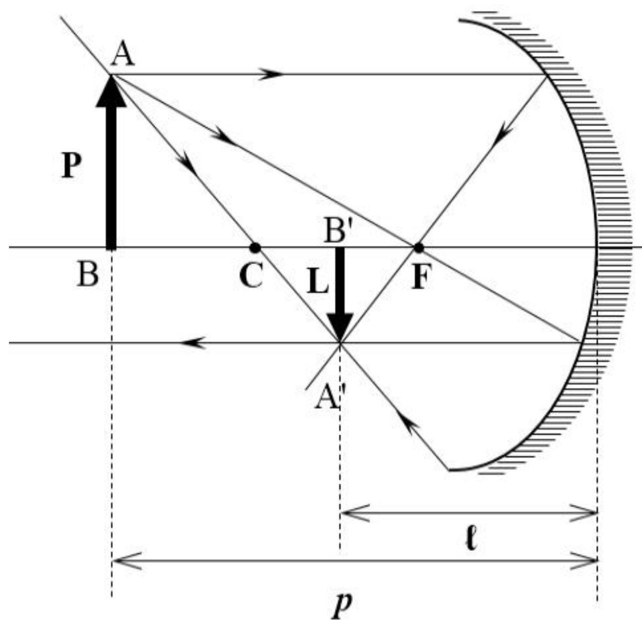
$$\frac{x}{p} + \frac{x}{\ell} = \frac{2x}{R},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}. \tag{2.25}$$

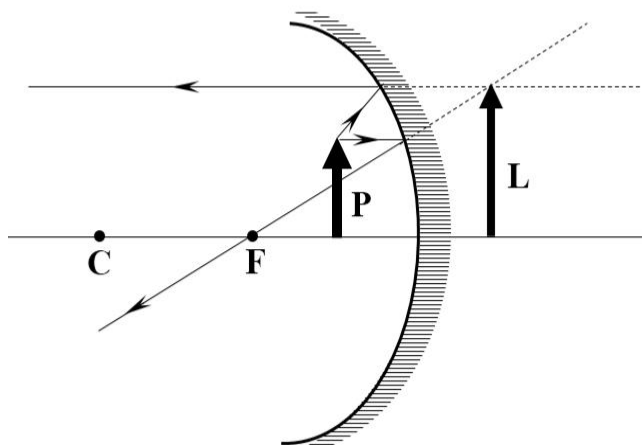
Prilikom nalaženja lika neke tačke zrake smo birali proizvoljno, što znači da se mogu uzimati razne zrake. Broj tih zraka je neograničen. Međutim, neke zrake kod konkavnog ogledala je vrlo lako konstruisati (na osnovu zakona odbijanja svjetlosti), te ćemo ih ovdje izdvojiti i nazvati **karakterističnim zrakama** (slika 2.11).

- Zraka (1), koja se od predmeta prostire paralelno s glavnom optičkom osom, nakon odbijanja prolazi kroz žižu F.
- Zraka (2), koja od predmeta prolazi kroz žižu F, nakon odbijanja se prostire paralelno s glavnom optičkom osom.
- Zraka (3), koja od predmeta prolazi kroz centar zakrivljenosti C, odbija se nazad u istom pravcu.

Koristeći karakteristične zrake, moguće je jednostavno dobiti lik nekog predmeta. Na slici 2.12 je prikazana konstrukcija lika predmeta P, koji se nalazi iza centra zakrivljenosti. Predmet je prikazan uspravnom strelicom. Velikim slovom P je označena visina predmeta, a velikim slovom L visina lika. Ranije je već rečeno da se malim slovima p i ℓ označavaju udaljenosti predmeta odnosno lika od ogledala (tačnije tjemena ogledala). Kod konstrukcije lika predmeta, čije je dno na glavnoj optičkoj osi, dovoljno je preslikati vrh predmeta, jer će se



Slika 2.12. *Konstruisanje lika predmeta (P) kad se predmet nalazi iza centra zakrivljenosti ogledala. Lik (L) je realan, obrnut i umanjen.*



Slika 2.13. *Konstruisanje lika predmeta (P) kad se predmet nalazi ispred žiže konkavnog (udubljenog) ogledala. Lik (L) je imaginaran, uspravan i uvećan.*

dno njegovog lika također nalaziti na glavnoj optičkoj osi, tačno ispod njegovog vrha. Ovako dobijen lik je *realan*, obrnut (okrenut je suprotno od predmeta) i umanjen. Kako ćemo sa slike odrediti da li je lik realan ili imaginaran? Ukoliko se lik dobije na presjeku odbijenih zraka, znači da će se formirati bez obzira na viđenje (na osobine oka). Za takav lik smo rekli da je realan. Ukoliko bi odbijene zrake divergirale (razilazile se), vidjeli bismo lik u presjeku produžetaka odbijenih zraka i takav lik je *imaginaran* (slučaj prikazan na slici 2.13). Iz gore navedenog se može zaključiti da lik, kod konkavnog ogledala, može biti i realan i imaginaran.

Ukoliko se prilikom proračuna položaja nekog lika, korištenjem jednačine (2.25), za dužinu ℓ dobije negativna vrijednost, to također znači da je lik imaginaran. S druge strane, ako se unaprijed zna da će lik nekog predmeta biti imaginaran, postoje dvije mogućnosti:

- da se u jednačinu (2.25) uvrštava negativna vrijednost veličine ℓ, ili
- da se negativan predznak veličine ℓ uvrsti u samu jednačinu, a da se onda sve vrijednosti uzimaju kao pozitivne.

Ovdje ćemo koristiti drugi način tako da će jednačina, u slučaju kad se zna da je lik imaginaran, glasiti:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\ell} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}. \tag{2.26}$$

Osim lika, imaginaran može biti i predmet, ali i žiža ogledala (odnosno žižna daljina). U svakom slučaju, negativan predznak tih veličina ćemo uvrštavati u jednačinu, a njihove vrijednosti uzimati kao pozitivne. Na osnovu predznaka ispred žižne daljine f u jednačinama (2.25) i (2.26) zaključujemo da je žiža konkavnog ogledala realna.

Kako odrediti da li je lik nekog predmeta umanjen ili uvećan? To se može zaključiti na osnovu odnosa njihovih udaljenosti od ogledala. Naime, iz sličnosti trouglova ABC i $A'B'C$ sa slike 2.12 (pravilo UUU, tj. sva tri ugla su podudarna), slijedi da su odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{P}{L} = \frac{p - R}{R - \ell}. \tag{2.27}$$

Kad se iz jednačine (2.25) izrazi R kao $R = \frac{2p\ell}{\ell+p}$ i uvrsti u odnos (2.27) dobija se:

$$\frac{P}{L} = \frac{p - \frac{2p\ell}{\ell+p}}{\frac{2p\ell}{\ell+p} - \ell},$$

$$\frac{P}{L} = \frac{p(\ell + p) - 2p\ell}{2p\ell - \ell(\ell + p)},$$

$$\frac{P}{L} = \frac{p\ell + p^2 - 2p\ell}{2p\ell - \ell^2 - \ell p},$$

$$\frac{P}{L} = \frac{p(p - \ell)}{\ell(p - \ell)},$$

$$\frac{P}{L} = \frac{p}{\ell}. \tag{2.28}$$

Dakle, relacija (2.28) nam pokazuje da, ukoliko je predmet na većem rastojanju od ogledala, tada je i njegova visina veća od visine lika i obratno. Na slici 2.12 se vidi da je lik bliže ogledalu, u odnosu na predmet ($\ell < p$), što znači i da je njegova visina manja od visine predmeta ($L < P$). Na osnovu relacije (2.28) uvodi se pojam **uvećanja** ogledala. Uvećanje ogledala je broj, koji pokazuje koliko je visina lika nekog predmeta veća ili manja od visine samog predmeta i definiše se kao:

$$u = \frac{L}{P} = -\frac{\ell}{p}, \tag{2.29}$$

pri čemu znak "$-$" pokazuje da li je lik *obrnut ili uspravan.*

Položaj lika se može približno procijeniti, bez konstrukcije slike, na osnovu jednačine (2.25). Na primjer ukoliko se predmet P nalazi u centru zakrivljenosti C znači da je $p = R$, udaljenost njegovog lika od ogledala će biti:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{2}{R},$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\ell} = \frac{2}{R},$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{R} - \frac{1}{R},$$

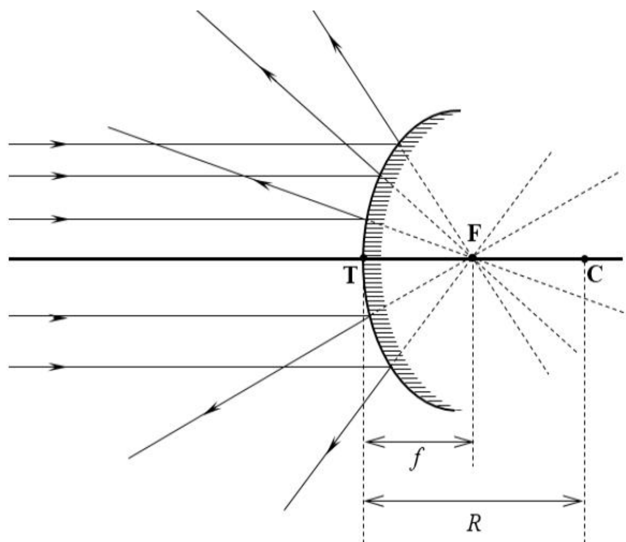
$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{R},$$

$$\ell = R.$$

Dakle, lik će također biti u centru zakrivljenosti, a s obzirom da je $\ell = R = p$, iz jednačine (2.29) slijedi da je uvećanje $u = -1$. Dakle, lik i predmet su iste visine, $P = L$, ali je lik obrnut u odnosu na predmet (zbog negativnog uvećanja).

Preslikavanje predmeta pomoću sfernih ogledala se može vršiti samo aproksimativno i to samo ako je otvor ogledala dovoljno mali. Preslikavanje je utoliko vjernije i oštrije ukoliko je otvor ogledala manji. To znači da ukoliko bi se jedna svijetla tačka preslikavala na sfernom ogledalu, njen lik bi bio neka površina približna kružnoj površini. Dakle, lik ne bi bio jasan. Ukoliko bi smanjivali otvor ogledala, ta površina bi se smanjivala i približavala bi se tački. Jednačina (2.25) za konkavno ogledalo je usvojena kao aproksimacija zbog njene jednostavnosti. Inače bila bi tačna samo kad bi se otvor ogledala beskonačno smanjio, što praktički nije moguće. U praksi se u mnogo slučajeva ne zahtijeva apsolutno oštar lik, pa se u takvim slučajevima pomenuta jednačina može koristiti uz zadovoljavajuću tačnost.

Ukoliko ogledalo ima veći otvor, nastaje znatno odstupanje od jasnog preslikavanja. To odstupanje naziva se **sferna aberacija** ili **nedostatak ogledala**. Na primjer, ako snop zraka nailazi na konkavno ogledalo velikog otvora, paralelno s glavnom optičkom osom, tačnim crtanjem odbijenih zraka vidjeli bi da one neće proći kroz jednu tačku kao na slici 2.9. Zrake, koje padaju na ogledalo blizu tjemena, poslije odbijanja prolaze kroz žižu, dok zrake, koje su pale na ogledalo dalje od tjemena, poslije odbijanja ne prolaze kroz žižu, nego bliže tjemenu. Dakle, sferna aberacija nastaje kod konkavnih ogledala s većim otvorom. Međutim, treba napomenuti da ovo nisu nedostaci, već odstupanja jednostavnih aproksimativnih relacija od onih koje bi bile dobijene bez aproksimacija. Sve



Slika 2.14. *Svjetlosne zrake, koje padaju na konveksno ogledalo paralelno s glavnom optičkom osom, odbijaju se tako da im produžeci prolaze kroz žižu ogledala (F). C je centar zakrivljnosti ogledala. Žiža se nalazi na polovini udaljenosti* $\overline{TC}$.

navedeno važi za sva sferna ogledala.

b) **Konveksno ogledalo**

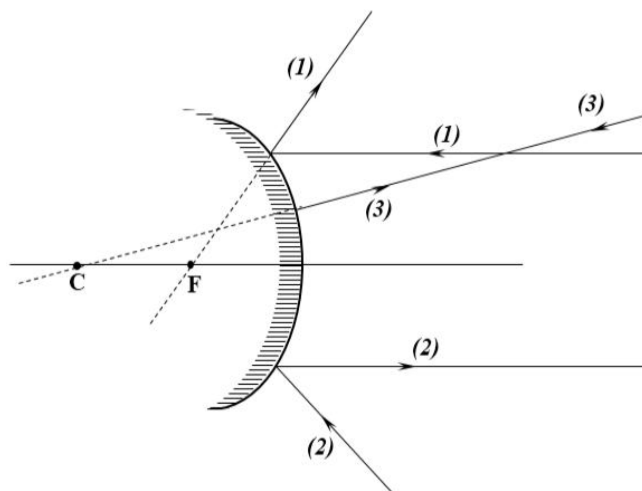
Razlika između konkavnog i konveksnog (ispupčenog) ogledala je u tome koja je strana sferne površine uglačana, unutrašnja ili spoljašnja. Konveksno ogledalo također ima tri karakteristične tačke: tjeme, žižu i centar zakrivljenosti, koje se nalaze na istom mjestu kao i kod konkavnog ogledala. Zbog toga je i žižna daljina f jednaka polovini dužine poluprečnika zakrivljenosti R, $f = \frac{R}{2}$. Konveksno ogledalo odbija svjetlosne zrake paralelne sa glavnom opitčkom osom, tako da njihovi produžeci prolaze kroz žižu ogledala (naravno ukoliko je otvor ogledala mali) kao na slici 2.14. Dakle, žiža konveksnog ogledala je imaginarna.

Također se mogu izdvojiti tri karakteristične zrake koje su prizkazane na slici 2.15, a koje se mogu korisiti za konstruisanje lika nekog predmeta, što je pokazano na slici 2.16. Lik predmeta, dobijen konveksnim ogledalom, će uvijek biti imaginaran, pa se jednačina konveksnog ogledala može napisati kao:

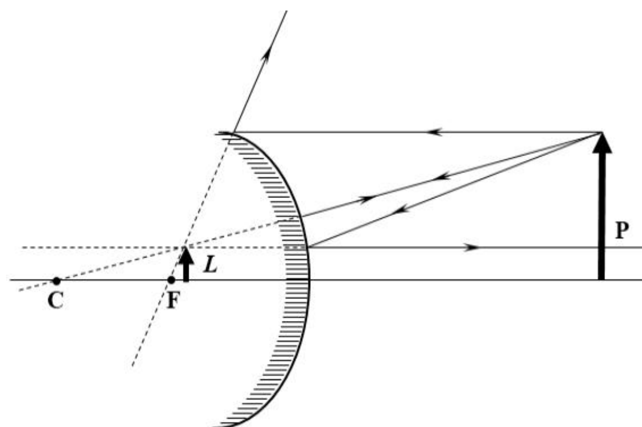
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\ell} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f}. \tag{2.30}$$

2.2.3 Zakon prelamanja svjetlosti

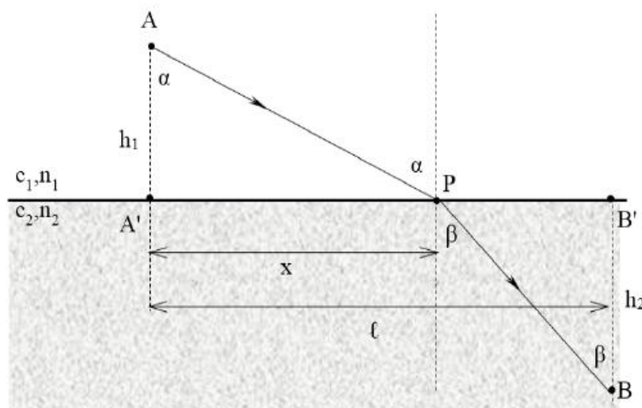
Kad svjetlost naiđe na granicu između dvije sredine, u kojima je brzina prostiranja svjetlosti različita, dolazi do prelamanja svjetlosne zrake i to tako da *upadna, prelomljena zraka i normala leže u istoj ravni, te da je odnos sinusa upadnog i prelomljenog ugla isti kao odnos brzina u tim sredinama.* Ovo predstavlja **zakon**



Slika 2.15. *Tri karakteristične zrake konveksnog ogledala.*



Slika 2.16. *Konstruisanje lika nekog predmeta (P) ukoliko se predmet nalazi ispred konveksnog (ispupčenog) ogledala. Lik (L) je imaginaran, uspravan i uvećan.*



Slika 2.17. *Prelamanje svjetlosti na granici između dvije sredine različitih indeksa prelamanja n_1 i n_2. α je upadni ugao, a β prelomni.*

prelamanja svjetlosti (dobijen analogijom s mehaničkim talasima), a njegova matematička formulacija glasi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}, \tag{2.31}$$

gdje je $n_{1,2}$ **relativni indeks prelamanja**, koji pokazuje koliko je brzina svjetlosti u jednoj sredini veća/manja u odnosu na brzinu u drugoj sredini. Za razliku od mehaničkih talasa, svjetlost može da se prostire i u vakuumu, te se može definisati i **apsolutni indeks prelamanja** (što nije bilo moguće za menahičke talasa) kao odnos brzine svjetlosti u vakuumu c i brzine u nekoj drugoj sredini c':

$$n = \frac{c}{c'}. \tag{2.32}$$

Moguće je i relativni indeks prelamanja predstaviti preko apsolutnih indeksa prelamanja pojedinih sredina u kojima je brzina svjetlosti c_1 odnosno c_2:

$$n_{1,2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.33}$$

Ukoliko u zakon prelamanja (2.31) uvrstimo jednačinu (2.33) dobija se

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

odnosno:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta. \tag{2.34}$$

Zakon prelamanja svjetlosti eksperimentalno je dokazao Snelius (holandski naučnik Willebrord Snellius) za graničnu površinu *voda - vazduh*, a Dekart (francuski naučnik René Descartes) je dao prvu naučnu formulaciju ovog zakona, te zbog toga jednačinu (2.34) nazivamo **Dekart-Sneliusov zakon**.

Na sličan način kao i kod odbijanja, izvešćemo zakon prelamanja iz Fermatovog principa. Neka svjetlosna zraka na slici 2.17 ide od tačke A do tačke B

prelamajući se u tački P. Brzina svjetlosti u prvoj sredini je c_1, a indeks (apsolutni) prelamanja te sredine je n_1. Za drugu sredinu vrijednosti su c_2 i n_2. Vrijeme potrebno da svjetlost pređe rastojanje $\overline{AP}$ je $t_1 = \frac{\overline{AP}}{c_1}$, a vrijeme potrebno da pređe rastojanje $\overline{PB}$ je $t_2 = \frac{\overline{PB}}{c_2}$. Ukupno vrijeme kretanja svjetlosti će onda biti:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\overline{AP}}{c_1} + \frac{\overline{PB}}{c_2},$$

što, nakon primjene Pitagorine teoreme vodi na:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c_2}.$$

Prema Fermatovom principu, svjetlost ide najbržom putanjom, tj.:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c_2}\right) = 0,$$

$$\frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}} = 0,$$

odnosno

$$\frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}. \tag{2.35}$$

Sa slike 2.17 se vidi da je

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \quad i \quad \sin\beta = \frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}},$$

što nakon uvrštavanja u jednačinu (2.35) daje Dekart-Snelijusov zakon u obliku:

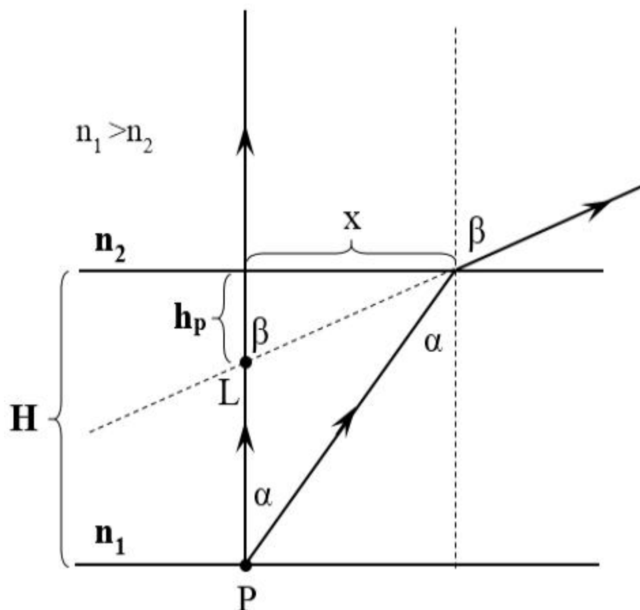
$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}. \tag{2.36}$$

Prelomni ugao β može biti veći ili manji od upadnog ugla α. To zavisi od odnosa optičkih gustina sredina koje se dodiruju. Za neku sredinu se može reći da je optički rjeđa u odnosu na neku drugu sredinu, ako svjetlost u njoj ima veću brzinu, odnosno ako je njen apsolutni indeks prelamanja manji. Ukoliko je obrnuto, tj. brzina manja, a indeks prelamanja veći, sredina je optički gušća. Iz jednačina (2.31) i (2.34) se može izvesti zaključak da ukoliko svjetlost prelazi u optički rjeđu sredinu svjetlost će se prelomiti **od normale** tj. $\beta > \alpha$, a ukoliko prelazi u optički gušću sredinu prelomit će se **ka normali** tj. $\beta < \alpha$.

2.2.4 Prividna dubina

Ukoliko iz vazduha posmatramo tijelo u vodi, ono izgleda kao da se nalazi na manjoj dubini nego što stvarno jeste, ili ako posmatramo štap, koji je djelimično uronjen u vodu, on izgleda prelomljen. Razlog tome je prelamanje svjetlosti. Dubina na kojoj vidimo lik nekog predmeta, ukoliko ga posmatramo iz neke druge sredine, naziva se **prividna dubina**.

Neka se u nekoj providnoj sredini, indeksa prelamanja n_1, na dubini H nalazi neki tačkasti svijetli predmet P kao na slici 2.18. Posmatrajmo dvije proizvoljne svjetlosne zrake, koje polaze od predmeta i dolaze do oka posmatrača. Jedna od



Slika 2.18. *Lik predmeta P, koji se nalazi u nekoj sredini indeksa prelamanja n_1, formira se na dubini h_p koju nazivamo prividna dubina i koja je različita od stvarne dubine H na kojoj se nalazi predmet.*

njih je okomita na granicu između te sredine i okoline, indeksa prelamanja n_2. Ona prolazi iz jedne u drugu sredinu bez prelamanja. Neka je α upadni ugao druge zrake na pomenutu granicu. Ta zraka se pri prolasku u drugu sredinu prelama pod uglom β, koji je određen zakonom prelamanja:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.37}$$

U presjeku produžetaka izlaznih zraka nalazi se lik predmeta L (vidi sliku 2.18). Očito je da se predmet i njegov lik ne nalaze na istoj dubini. Dubinu h_p na kojoj se nalazi lik nazivamo *prividna dubina.* S pomenute slike vidimo da je

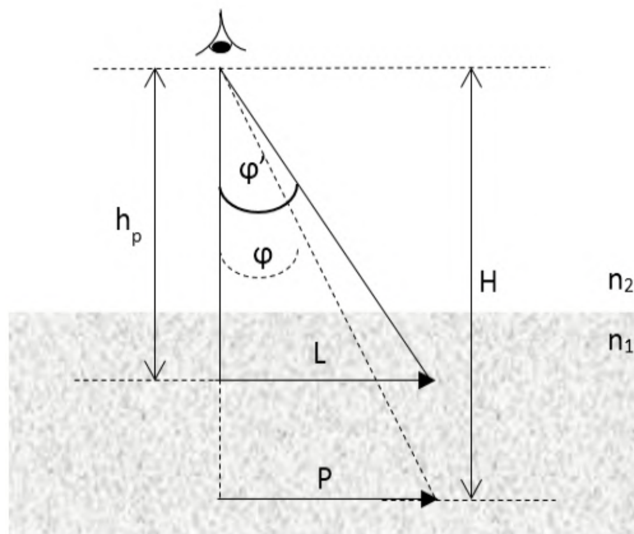
$$\text{tg}\alpha = \frac{x}{H} \quad \text{i} \quad \text{tg}\beta = \frac{x}{h_p}.$$

Dijeljenjem ove dvije jednačine dolazi se do veze između prividne i stvarne dubine:

$$h_p = H\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}. \tag{2.38}$$

Jasno je da prividna dubina zavisi od ugla pod kojim se gleda predmet. Ukoliko se pak predmet gleda pod malim uglom u odnosu na vertikalu, tada se može primijeniti aproksimacija $\sin\phi \approx \text{tg}\phi \approx \phi$ te jednačine (2.37) i (2.38) daju:

$$h_p = H\frac{n_2}{n_1}. \tag{2.39}$$



Slika 2.19. *Lik na dubini h_p ima istu veličinu kao i predmet $L = P$. Ugao φ, pod kojim posmatrač vidi predmet, nije isti kao ugao φ', pod kojim vidi njegov lik.*

Kad se predmet gleda iz vazduha, tj. $n_2 = 1$, a indeks prelamanja sredine u kojoj se nalazi predmet $n_1 = n$, tada je

$$h_p = \frac{H}{n}, \tag{2.40}$$

što znači da je prividna dubina n puta manja od stvarne dubine (uz uslov da se predmet gleda normalno odozgo).

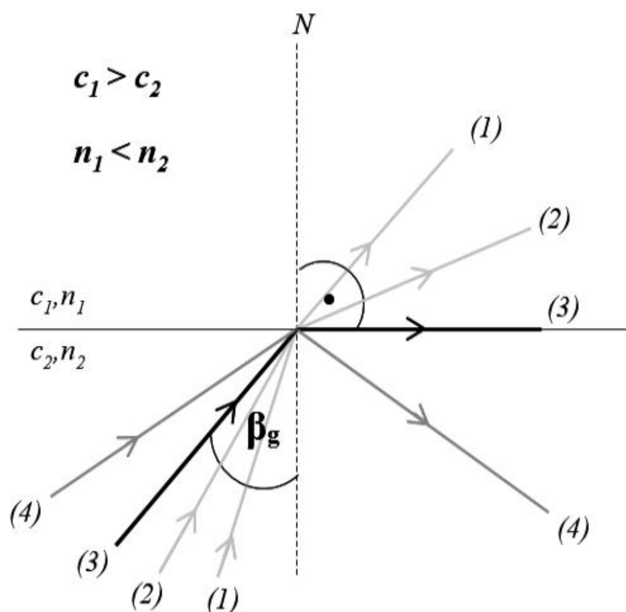
Lik predmeta, osim što se nalazi na manjoj dubini nego predmet, također izgleda i veći od predmeta, iako su zapravo jednake veličine tj. $L = P$. Razlog je taj, što je lik bliže oku posmatrača, pe se vidi pod većim uglom nego što bi se vidio predmet kad ne bi bilo prelamanja svjetlosti. To uvećanje se naziva ugaono uvećanje i definiše se kao odnos tangensa ugla pod kojim se vidi lik (φ') i tangensa ugla pod kojim se vidi predmet (φ) (slika 2.19):

$$\Gamma = \frac{\mathrm{tg}\varphi'}{\mathrm{tg}\varphi}, \tag{2.41}$$

$$\Gamma = \frac{\frac{L}{h_p}}{\frac{P}{H}} = \frac{H}{h_p} = \frac{n_1}{n_2} = n_{1,2}. \tag{2.42}$$

2.2.5 Totalna refleksija

Posmatrajmo sada samo slučaj u kojem svjetlosne zrake prelaze iz optički gušće u optički rjeđu sredinu kao na slici 2.20. Zrake će se prelamati tako da prelomni ugao bude veći od upadnog. Činjenica je da će se povećavanjem upadnog ugla povećavati i prelomni ugao. Karakterističan slučaj predstavlja zraka (3) na slici



Slika 2.20. *Pri prelazu svjetlosti iz optički gušće u optički rjeđu sredinu dolazi do pojave totalne refleksije. Ugao β_g predstavlja granični ugao totalne refleksije. Ukoliko je upadni ugao veći od graničnog, zraka će se odbiti od granicu između tih sredina.*

2.20. Ako se svjetlosna zraka prostire u pravcu zrake (3), ona će se prelomiti tako da joj je prelomni ugao jednak 90°. Upadni ugao za koji je prelomni ugao jednak 90° nazivamo **granični ugao**. Primjenom Dekart-Sneliusovog zakona na prelamanje svjetlosne zrake (3) dobijamo granični ugao:

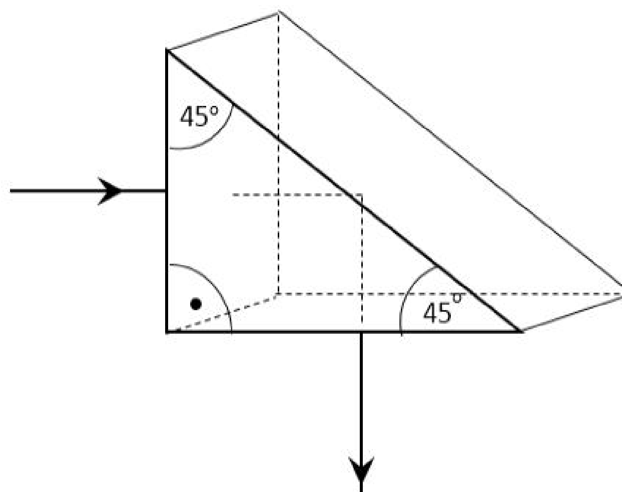
$$n_2 \sin \beta_g = n_1 \sin 90^\circ,$$

$$\sin \beta_g = \frac{n_1}{n_2}. \tag{2.43}$$

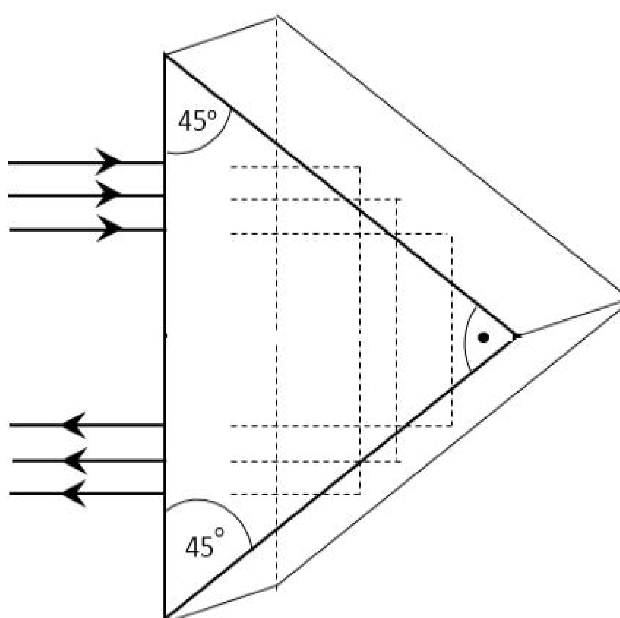
Ukoliko je upadni ugao veći od graničnog, "prelomni ugao" će biti veći od 90°, a to znači da će se zraka odbiti od granicu između te dvije sredine (zraka (4) na slici 2.20). Tu pojavu nazivamo **totalna (unutrašnja) refleksija**.

Elektromagnetni talasi, kao i mehanički, pri nailasku na graničnu površinu se i odbijaju i prelamanju. Ukoliko se upadni ugao približava graničnom uglu intenzitet prelomljene zrake slabi, a odbijene se povećava.

Glavna primjena totalne refleksije je u optičkim instrumentima koji reflektuju i orijentišu svjetlosne zrake u željenom pravcu. Najčešće se koristi staklena prizma s totalnom refleksijom i skretanjem zraka za 90° i 180°. To je jednakokraka pravougla prizma data na slikama 2.21 i 2.22. Svjetlosna zraka na slici 2.21 pada okomito na jednu stranu prizme i prolazi bez prelamanja (jer je upadni ugao jednak nuli). Zatim pada na hipotenuznu stranu pod uglom od 45°. S obzirom da je granični ugao totalne refleksije na granici staklo-vazduh 42°, upadni ugao je veći od graničnog te sigurno dolazi do totalne refleksije. Odbijena zraka je okomita na upadnu što znači da je zakrenuta za 90°. Ukoliko svjetlosni snop

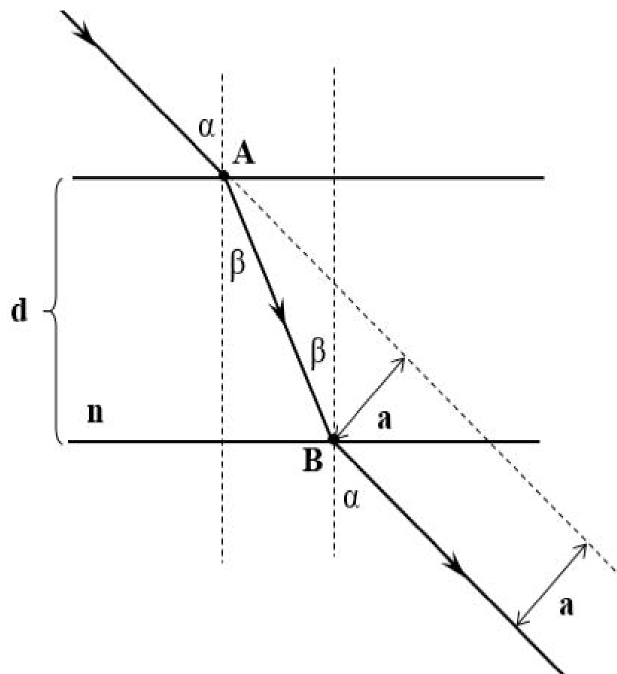


Slika 2.21. *Jednakokraka pravougla prizma koja, na osnovu totalne refleksije, zakreće svjetlosni snop za* 90°.



Slika 2.22. *Jednakokraka pravougla prizma koja, na osnovu totalne refleksije, zakreće svjetlosni snop za* 180°.

pada na hipotenuznu površinu, kao na slici 2.22, pri izlasku iz prizme će biti pralelan upadnom snopu, ali suprotnog smjera, tj. zakrenut za 180°.



Slika 2.23. *Pri prolazu kroz planparalelnu ploču svjetlosna zraka ne mijenja svoj pravac prostiranja, nego se samo pomjera za neko rastojanje a.*

2.2.6 Prelamanje svjetlosti kroz planparalelnu ploču

Planparalelna ploča je ploča čije su površine ravne i međusobno paralelne. Neka svjetlosna zraka pada pod uglom α na jednu površinu planparalelne ploče, indeksa prelamanja n i debljine d. Ona će se prelomiti pod uglom β, produžiti do druge površine ploče, gdje će se ponovo prelomiti, te izaći iz ploče. Ugao, koji izlazna zraka zaklapa s normalom na ploču, jednak je upadnom uglu α, što se može zaključiti sa slike 2.23 koristeći pravilo o jednakosti uglova s paralelnim kracima. Dakle, pri prolasku kroz planparalelnu ploču svjetlosna zraka ne mijenja svoj pravac prostiranja, nego se samo pomjera za neko rastojanje a. To pomjeranje zavisi, kako od upadnog ugla, tako i od indeksa prelamanja materijala od kojeg je napravljena ploča. Sa slike 2.23 vidimo da je:

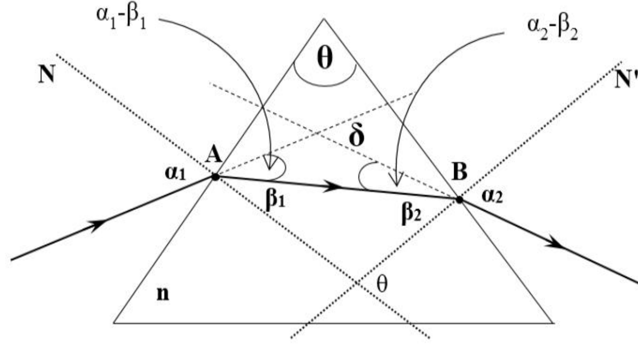
$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a}{\overline{AB}},$$

$$\cos\beta = \frac{d}{\overline{AB}}.$$

Dijeljenjem gornje dvije jednačine dobijamo izraz za pomjeranje svjetlosne zrake pri prolasku kroz planparalelnu ploču:

$$a = \frac{d}{\cos\beta}\sin(\alpha - \beta). \tag{2.44}$$

Pri prolasku svjetlosne zrake kroz ma koji broj planparalelnih ploča s istom okolnom supstancom, ona će zadržati svoj pravac prostiranja i bit će paralelno pomjerena.



Slika 2.24. *Pri prolazu svjetlosne zrake kroz providnu prizmu (indeksa prelamanja n, čiji je ugao označen s θ, dolazi do promjene njenog pravca prostiranja za ugao devijacije δ.*

2.2.7 Prelamanje svjetlosti kroz prizmu

Posmatrajmo šta se dešava sa svjetlosnom zrakom pri prolasku kroz trostranu providnu prizmu napravljenu od materijala indeksa prelamanja n. Ugao θ u vrhu prizme na slici 2.24 je **ugao prizme**. Neka svjetlosna zraka pada na jednu stranu prizme pod uglom α_1. Prelama se pod uglom β_1 i pada na drugu stranu prizme pod uglom β_2. Zatim izlazi iz prizme pod uglom α_2. Pravci upadne i izlazne zrake se ne poklapaju, što znači da je došlo do skretanja zrake nakon prolaska kroz prizmu. Ugao za koji je zraka skrenula, na slici 2.24 je označen s δ, nazivamo **ugao devijacije (skretanja)**. Taj ugao se može odrediti na osnovu zakona prelamanja svjetlosti i poznate geometrijske tvrdnje da je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja suprotna ugla. Na presjeku normala N i N' nalazi se ugao prizme θ, jer su to uglovi s okomitim kracima. On je jednak zbiru unutrašnja dva suprotna ugla, tj.

$$\theta = \beta_1 + \beta_2, \tag{2.45}$$

dok je iz istog razloga, ugao devijacije jednak

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2. \tag{2.46}$$

Uglove $\alpha_{1,2}$ i $\beta_{1,2}$ ćemo po potrebi dobiti iz zakona prelamanja svjetlosti

$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1, \tag{2.47}$$

odnosno

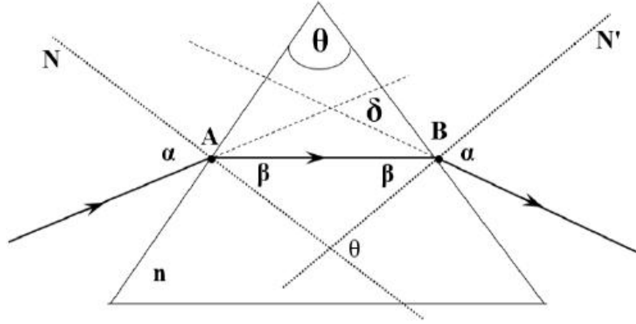
$$n\sin\beta_2 = \sin\alpha_2. \tag{2.48}$$

Pod kojim uslovom bi ugao devijacije bio minimalan tj. $\delta = \delta_{min}$? Da bi odgovorili na ovo pitanje potrebno je izraziti ugao devijacije preko ugla β_1. Na osnovu gornjih jednačina dobijamo:

$$\alpha_1 = \arcsin(n\sin\beta_1) \quad i \quad \alpha_2 = \arcsin[n\sin(\theta - \beta_1)],$$

što uvrštavanjem u jednačinu (2.46) daje:

$$\delta = \arcsin(n\sin\beta_1) + \arcsin[n\sin(\theta - \beta_1)] - \theta. \tag{2.49}$$



Slika 2.25. *Minimalni ugao devijacije se postiže simetričnim prolaskom svjetlosne zrake kroz jednakokraku providnu prizmu, tj. kad su upadni i prelomni uglovi jednaki, zbog čega je i zraka unutar prizme paralelna njenoj osnovici.*

Ekstrem funkcije (2.49) se dobija kad se prvi izvod po β_1 izjednači s nulom (drugi izvod iste funkcije pokazuje da se radi o minimumu)

$$\frac{d\delta}{d\beta_1} = \frac{n\cos\beta_1}{\sqrt{1-n^2\sin^2\beta_1}} - \frac{n\cos(\theta-\beta_1)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\theta-\beta_1)}} = 0,$$

odnosno

$$\frac{n\cos\beta_1}{\sqrt{1-n^2\sin^2\beta_1}} = \frac{n\cos(\theta-\beta_1)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\theta-\beta_1)}}.$$

Gornja jednakost je moguća samo ako je

$$\beta_1 = \theta - \beta_1,$$

što, poredeći s relacijom (2.45), vodi na zaključak da mora biti

$$\beta_1 = \beta_2. \tag{2.50}$$

Međutim, ako je $\beta_1 = \beta_2$ onda su i uglovi α_1 i α_2 jednaki. To pokazuje da minimalni ugao skretanja nastaje pri simetričnom prolazu svjetlosti kroz prizmu, tj. kad je svjetlosna zraka unutar prizme, paralelna njenoj osnovici kao na slici 2.25.

Uvrštavajući uslov (2.50) u izraz za ugao prizme (2.45) i ugao devijacije (2.46) dobijamo

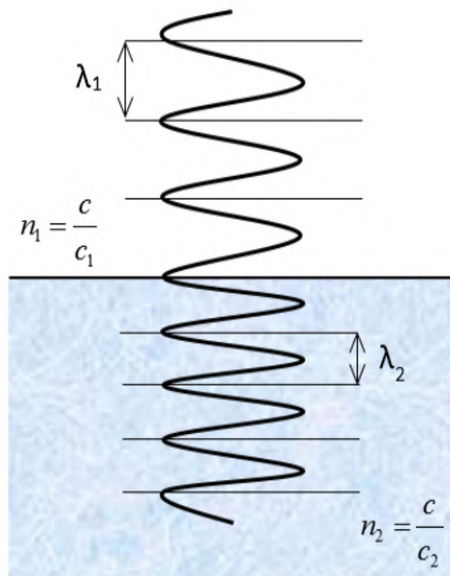
$$\theta = 2\beta \quad i \quad \delta_{min} = 2\alpha - \theta.$$

Kad iz gornjih relacija izrazimo uglove $\alpha = \frac{\delta_{min}+\theta}{2}$ i $\beta = \frac{\theta}{2}$ i uvrstimo u zakon prelamanja, koji sada glasi:

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$

dobijamo izraz za minimalni ugao devijacije:

$$\sin\frac{\delta_{min}+\theta}{2} = n\sin\frac{\theta}{2},$$



Slika 2.26. *Pri prelazu iz jedne optičke sredine u drugu, svjetlost mijenja svoju talasnu dužinu, ali ne i frekvenciju. Dakle, brzina prostiranja svjetlosti, u različitim optičkim sredinama, neće biti ista.*

$$\delta_{min} = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{\theta}{2} \right) - \theta. \tag{2.51}$$

Za male uglove δ_{min} postaje:

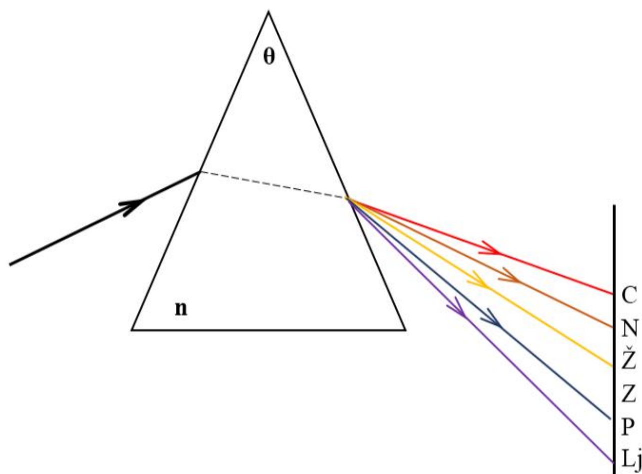
$$\delta_{min} = (n-1)\theta. \tag{2.52}$$

2.2.8 Disperzija svjetlosti

U prethodnim razmatranjima prelamanja svjetlosne zrake pretpostavljali smo prećutno da ta zraka ima jednu talasnu dužinu tj. da je zraka **monohromatska** (jedne boje). Međutim obična bijela svjetlost (Sunčeva) je **složena svjetlost** i predstavlja kontinuirani niz svjetlosti različitih talasnih dužina (boja). Kad takva svjetlost naiđe na sredinu koja je prelama, ona se razlaže na različite boje. Ta pojava se naziva **disperzija svjetlosti**. Ona nastaje zbog toga što indeks prelamanja svjetlosti, osim što zavisi od prirode supstance, zavisi i od talasne dužine upotrijebljene svjetlosti. Kad svjetlost pređe iz jedne optičke sredine u drugu, u kojoj joj je brzina prostiranja drugačija, ona ne mijenja svoju frekvenciju, već talasnu dužinu ($c = \lambda f$) (vidi sliku 2.26). Iz definicije apsolutnog indeksa prelamanja slijedi da on zavisi od talasne dužine svjetlosti:

$$n = \frac{c}{c_1} = \frac{\lambda f}{\lambda_1 f} = \frac{\lambda}{\lambda_1}. \tag{2.53}$$

To znači da će se svjetlosne zrake, različite boje (talasne dužine), prelamati pod različitim uglovima. Razlika između uglova prelamanja svjetlosnih zraka različite boje naziva se **ugaona disperzija**.



Slika 2.27. *Pri prolazu bijele svjetlosti kroz prizmu dolazi do disperzije svjetlosti, tj. do razlaganja svjetlosti na njene komponente. Svaka komponenta ima različitu talasnu dužinu odnosno boju. Spektar bijele svjetlosti sastoji se od linija crvene, narandžaste, žute, zelene, plave i ljubičaste boje.*

Kad se kroz uski otvor propusti bijela svjetlost, tako da nakon prolaska kroz otvor pada na staklenu prizmu (slika 2.27), na zastoru iza prizme pojavit će se slike tog proreza u vidu linija različitih boja i to redom: crvena (najveća talasna dužina), narandžasta, žuta, zelena, plava i ljubičasta (najmanja talasna dužina). Sve te linije zajedno nazivaju se **spektar**. Činjenica je da spektar ne izgleda kao skup jasno odvojenih linija nego kao kontinualna gradacija boja od crvene do ljubičaste, tako da osim navedenih boja, postoje i sve nijanse među njima od crvenog do ljubičastog kraja.

Kao mjera disperzije spektra uzima se razlika između uglova skretanja svjetlosnih zraka različitih talasnih dužina koje možemo dobiti iz jednačine (2.52):

$$\delta_1 = (n_1 - 1)\theta, \quad \delta_2 = (n_2 - 1)\theta$$

odakle je:

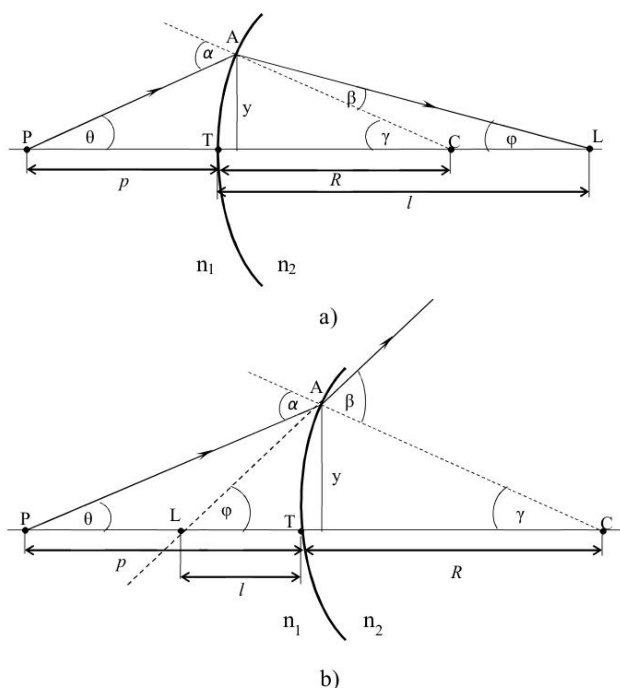
$$\delta_2 - \delta_1 = (n_2 - n_1)\theta. \tag{2.54}$$

Ova razlika je *mjera disperzije* ili samo *disperzija.* S obzirom da se ugao prizme θ ne mijenja, zaključujemo da se kao mjera disperzije može uzeti i razlika indeksa prelamanja svjetlosti različitih talasnih dužina.

2.2.9 Prelamanje svjetlosti kroz sfernu graničnu površinu

Dvije sredine, indeksa prelamanja n_1 i n_2, razdvojene su sfernom površinom poluprečnika R, pri čemu je C centar zakrivljenosti te površine, a T tjeme te površine. Predmet P se nalazi na optičkoj osi. Primjenjujući pravilo prelamanja svjetlosti, njegov lik dobijamo u tački L (vidi sliku 2.28). U slučaju (a) lik je realan, jer smo ga dobili u presjeku prelomnih zraka, dok smo u slučaju (b) lik dobili u presjeku produžetaka prelomnih zraka te ga smatramo imaginarnim. Tačke P i L mogu međusobno mijenjati uloge, tj. ukoliko bi predmet bio u tački

L, lik bi se formirao u tački P. Ukoliko bi položaj lika izrazili preko ugla θ, mogli bismo zaključiti da je udaljenost lika ℓ najveća za $\theta = 0$, a da se smanjuje povećanjem tog ugla. S obzirom da je ugao θ, ugao koji zaklapa upadna zraka s optičkom osom, to znači da položaj lika zavisi od ugla upadne zrake, te da neće uvijek biti u tački L. Zbog toga je potrebno ovu pojavu ograničiti na zrake koje padaju na sfernu površinu blizu optičke ose. Takve zrake se zovu **paraksijalne zrake** i sijeku se u istoj tački. Zbog toga, pri daljem izvođenju formula, možemo koristiti uobičajene aproksimacije za male uglove ($\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \alpha$).



Slika 2.28. *Prelamanje svjetlosti na sfernoj graničnoj površini. Predmet se nalazi na optičkoj osi u tački P, a njegov lik se nalazi u tački L također na optičkoj osi te je: a) realan, jer je $n_1 < n_2$, b) imaginaran, jer je $n_1 > n_2$.*

Na slici 2.28a površina je konveksna prema upadnoj svjetlosti, a s obzirom da je $\beta < \alpha$ slijedi da je $n_2 > n_1$. Uglovi α i γ su vanjski uglovi trouglova $\triangle PCA$ i $\triangle CLA$, respektivno, te možemo pisati:

$$\alpha = \theta + \gamma, \quad \gamma = \beta + \varphi \Rightarrow \beta = \gamma - \varphi.$$

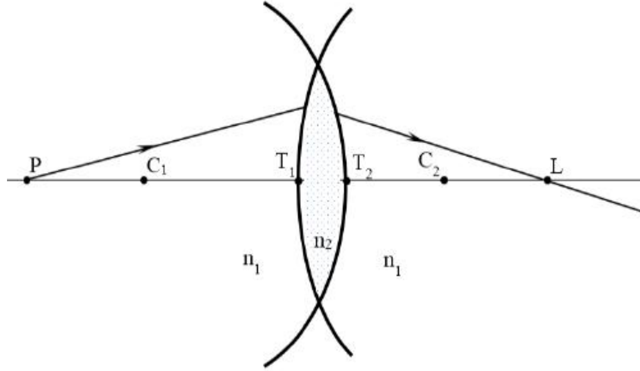
Iz zakona prelamanja u tački A slijedi:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

S obzirom da se α i β mogu smatrati malim uglovima slijedi da je:

$$n_1\alpha = n_2\beta,$$

$$n_1(\theta + \gamma) = n_2(\gamma - \varphi),$$



Slika 2.29. *Formiranje lika predmeta na tankom sočivu indeksa prelamanja* n_2 *koje se nalazi u sredini indeksa prelamanja* $n_1 < n_2$.

$$n_1\theta + n_2\varphi = (n_2 - n_1)\gamma,$$
$$n_1\text{tg}\theta + n_2\text{tg}\varphi = (n_2 - n_1)\text{tg}\gamma,$$
$$n_1\frac{y}{p} + n_2\frac{y}{\ell} = (n_2 - n_1)\frac{y}{R},$$
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{\ell} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}. \qquad (2.55)$$

Relacija (2.55) se smatra jednom od najvažnijih relacija geometrijske optike. Veličina $\frac{n_2 - n_1}{R}$ naziva se **optička moć** površine, te može biti pozitivna i negativna. U razmatranom slučaju (slika 2.28a) optička moć je pozitivna i lik je realan. Ista relacija važi i za sve ostale slučajeve pri čemu trebamo voditi računa o znaku pojedinih veličina. Ukoliko su veličine imaginarne uzimamo ih kao negativne, kao i poluprečnke površina koje su konkavne prema upadnoj zraci.

Kod konveksnih površina lik će biti realan ako je $n_2 > n_1$, u suprotnom će lik biti imaginaran. Kod konkavnih površina lik je u svakom slučaju imaginaran.

2.2.10 Optička sočiva

Dvije ili više centriranih sfernih prelomnih površina nazivamo **optičko sočivo**. Prosto sočivo se sastoji od dvije sferne površine, a rastojanje između tjemena površina nazivamo **debljina sočiva**. Oni su sastavni dijelovi optičkih instrumenata. Materijal od kojeg se prave sočiva je uglavnom staklo, a okolna sredina vazduh. Strane sočiva su sferne površine koje mogu imati različite poluprečnike, a jedna čak može da bude i ravna. Linija koja prolazi kroz oba centra krivina i kroz oba tjemena naziva se **optička osa sočiva**. Površine sočiva su dobro uglačane, a dimenzija su takvih da se pomoću paraksijalnih zraka uglavnom mogu dobiti jasni nedeformisani likovi.

2.2.11 Tanka prosta sočiva

Ovdje ćemo razmatrati prosta tanka sočiva, tj. ona kod kojih se debljina sočiva zanemaruje. Na slici 2.29 je prikazano formiranje lika predmeta na tan-

kom sočivu, indeksa prelamanja n_2, koje se nalazi u sredini indeksa prelamanja $n_1 < n_2$. Pri prelamanju na prvoj površini, poluprečnika zakrivljenosti R_1, dobijamo imaginaran lik. Na osnovu relacije (2.55) i činjenica da je poluprečnik površine pozitivan (jer je konveksna prema upadnoj zraci), a lik imaginaran, za prelamanje na prvoj sfernoj površini se može napisati

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{\ell'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1}, \tag{2.56}$$

dok se za prelamanje na drugoj površini, poluprečnika R_2, može napisati

$$\frac{n_2}{p'} + \frac{n_1}{\ell} = -\frac{(n_1 - n_2)}{R_2}. \tag{2.57}$$

Budući da se razmatraju tanka sočiva može se uzeti da je $p' = \ell'$, te sabiranjem ove dvije relacije dobijamo **osnovnu (aproksimativnu) jednačinu tankih sočiva**

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{\ell} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.58}$$

ili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = (\frac{n_2}{n_1} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{2.59}$$

Ukoliko je okolna sredina vazduh ($n_1 = 1$), a indeks prelamanja sočiva n, onda je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2.60}$$

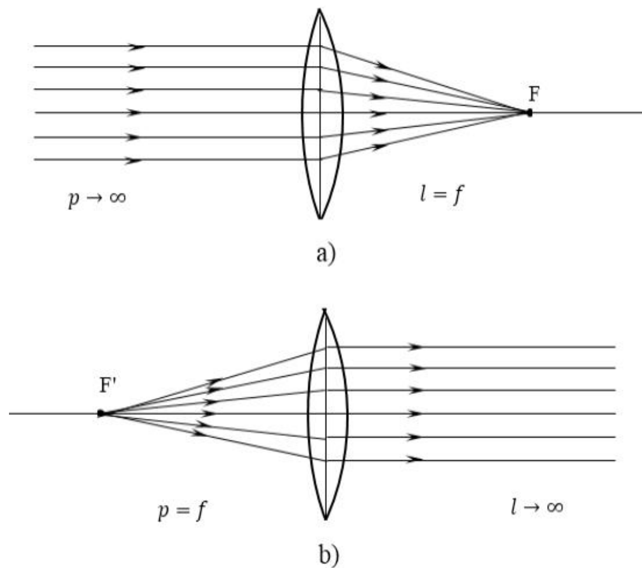
što predstavlja *optičarsku jednačinu.*

Jednačine (2.59) i (2.60), iako su izvedene za sočivo koje je s obje strane ispupčeno, važe i za sve ostale oblike sočiva uz poštivanje dogovora o predznacima. **Dogovor o predznacima za poluprečnik krivine** glasi:

- poluprečnik krivine je pozitivan ako je površina sočiva ispupčena,
- poluprečnik krivine je negativan ako je poršina sočiva udubljena,
- poluprečnik krivine teži u beskonačnost ako je površina sočiva ravna.

Dogovor o predznacima za udaljenost lika od sočiva glasi:

- udaljenost lika je pozitivna ukoliko je lik realan,
- udaljenost lika je negativna ukoliko je lik imaginaran (negativan znak se može uključiti u jednačinu na odgovarajućem mjestu, a onda se za udaljenosti ℓ uzima pozitivna vrijednost).



Slika 2.30. *Ako na sočivo padaju paralelne paraksijalne zrake one se poslije prelamanja sijeku u tački F, koja se naziva žiža ili fokus sočiva. Njeno rastojanje od tjemena sočiva, f, naziva se žižna daljina. Sočivo ima dvije žiže, koje se dobiju na način prikazan na slikama a) i b).*

2.2.12 Žiža ili fokus sočiva. Optička moć sočiva

Ako na sočivo padaju paralelne paraksijalne zrake one se poslije prelamanja sijeku u tački F na osi sočiva (slika 2.30a), odnosno u tački F' (slika 2.30b). Te tačke nazivamo **žiža ili fokus sočiva**, a njihovo rastojanje od tjemena sočiva **žižna daljina** f odnosno f'. Konstrukcijom prelamanja zraka na sočivu, možemo dokazati da su žižne daljine f i f' jednake, bez obzira da li su poluprečnici zakrivljenosti sočiva jednaki ili ne, bitno je samo da je s obje strane sočiva ista sredina. Te žiže se nazivaju još i *glavne žiže sočiva*.

Dokaz da su žižne daljine s obje strane sočiva iste, bez obzira na odnos poluprečnika, može se izvesti iz osnovne jednačine sočiva (2.59). Naime, ako su zrake paralelne znači da se predmet nalazi na velikoj udaljenosti tj. $p \to \infty$ (slika 2.30a), pa je njegov lik onda u tački F tj. $\ell = f$:

$$\frac{1}{f} = (\frac{n_2}{n_1} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2.61}$$

a ukoliko se predmet nalazi u F' (slika 2.30b) tada je $p = f$, a $\ell \to \infty$, pa opet dobivamo istu relaciju (2.61).

Sada možemo definisati **optičku moć sočiva** kao

$$\omega = \frac{1}{f}, \tag{2.62}$$

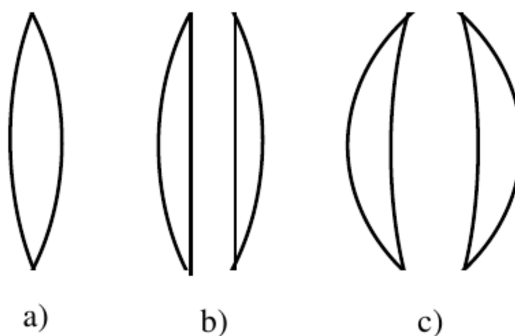
ako je sočivo u vazduhu, odnosno

$$\omega = \frac{n}{f}, \tag{2.63}$$

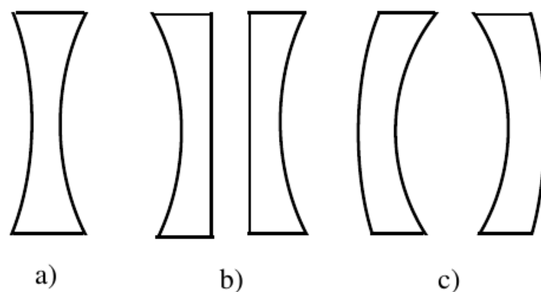
ako je sočivo u nekoj sredini indeksa prelamanja n. Optička moć predstavlja mjeru divergencije i konvergencije svjetlosti i može se odnositi kako na sočiva tako i na ogledala i druge optičke sisteme. Jedinica za optičku moć je **dioptrija** $1\,\mathrm{D} = \frac{1}{\mathrm{m}}$.

2.2.13 Vrste sočiva

Sočiva, kod kojih je žižna daljina pozitivna ($f > 0$), nazivamo **sabirna (konvergentna)**. Takva sočiva skupljaju zrake u sredini, koja je optički rjeđa od materijala sočiva tj. kad paralelne zrake naiđu na sabirno sočivo, one konvergiraju (skupljaju se) prema jednoj tački. Tipičan primjer takvog sočiva je *bikonveksno sočivo* (slika 2.31a). Ono je ispupčeno s obje strane i prema usvojenom dogovoru oba poluprečnika su pozitivna. Bikonveksno sočivo je *simetrično* ako su mu poluprečnici jednaki. U konvergentna sočiva spadaju još i *plankonveksno* (slika 2.31b), kod kojeg je jedan poluprečnik pozitivan (ispupčena strana), a drugi beskonačno velik (ravna strana), te *konveksni meniskus* (slika 2.31c), kod kojeg su poluprečnici različitog znaka, ali je poluprečnik sa negativnim predznakom (udubljena strana) veći od poluprečnika s pozitivnim predznakom (ispupčena strana). Sva konvergentna sočiva deblja su u sredini nego na krajevima.



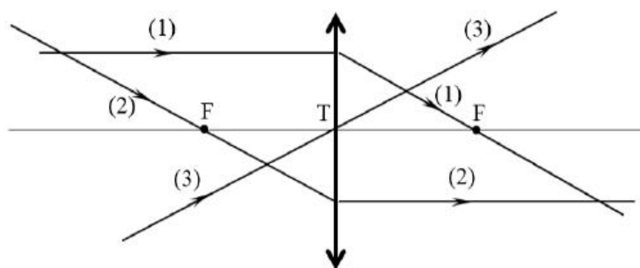
Slika 2.31. *Vrste sabirnog (konvergentnog) sočiva: a) bikonveksno, b)plankonveksno, c) konveskni meniskus.*



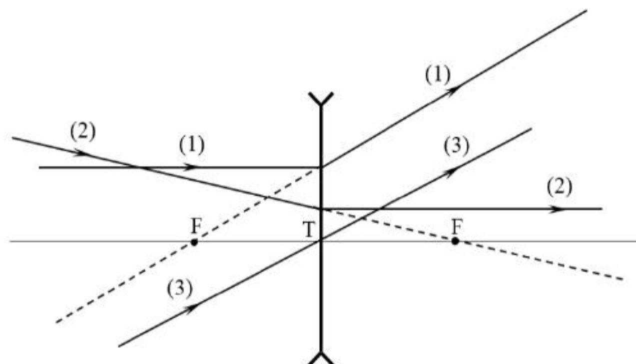
Slika 2.32. *Vrste rasipnog (divergentnog) sočiva: a) bikonkavno, b)plankonkavno, c) konkavni meniskus.*

Ukoliko paralelne zrake nakon prolaska kroz sočivo divergiraju (rasipaju se) takvo sočivo se naziva **rasipno (divergentno)**. Ono ima negativnu žižnu daljinu ($f < 0$). Tipičan primjer je *bikonkavno sočivo* (slika 2.32a), kod kojeg su oba poluprečnika negativna. Bikonkavno sočivo je *simetrično* ako su mu poluprečnici jednaki. Tu spadaju još i *plankonkavno* (slika 2.32b), kod kojeg je jedan poluprečnik negativan (udubljena strana), a drugi beskonačno velik (ravna strana), te *konkavni meniskus* (slika 2.32c), kod kojeg su poluprečnici razičitog znaka, ali je poluprečnik sa negativnim predznakom (udubljena strana) manji od poluprečnika s pozitivnim predznakom (ispupčena strana). Sva divergentna sočiva su deblja na krajevima nego u sredini.

2.2.14 Karakteristične zrake - formiranje lika.

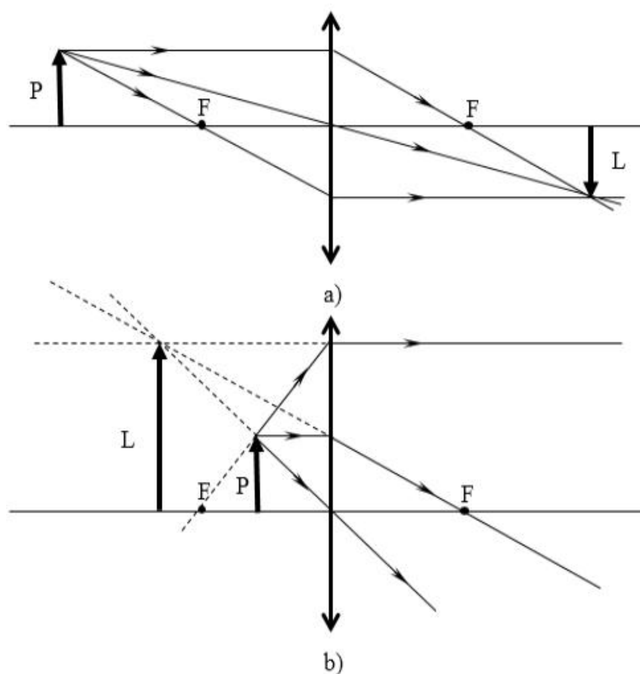


Slika 2.33. *Karakteristične zrake sabirnog (konvergentnog) sočiva.*

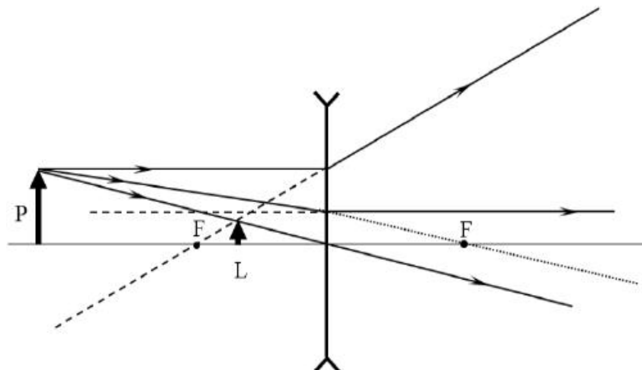


Slika 2.34. *Karakteristične zrake rasipnog (divergentnog) sočiva.*

Karakteristične zrake koriste se za nalaženje položaja i visine lika i prikazane su na slikama 2.33 (za sabirno) i 2.34 (za rasipno). Da bismo dobili lik nekog predmeta potrebno je naći presjek najmanje dvije karakteristične zrake, koje polaze s vrha predmeta. Na slikama 2.35 i 2.36 prikazan je način dobijanja lika na sabirnom i rasipnom sočivu, pri čemu su korištene sve tri karakteristične zrake. Lik dobiven na presjeku prelomnih zraka je realan, a na presjeku produžetaka prelomnih zraka je imaginaran.



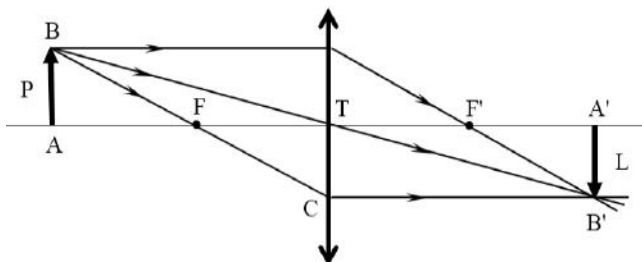
Slika 2.35. *Određivanje položaja lika datog predmeta, visine P, na sabirnom sočivu. Dobiveni lik, visine L, je: a) obrnut i realan, b) uspravan i imaginaran.*



Slika 2.36. *Određivanje položaja lika datog predmeta, visine P, na rasipnom sočivu. Dobiveni lik je visine L, uspravan i imaginaran.*

2.2.15 Aproksimativna formula za tanka sočiva i uvećanje sočiva

Ukoliko zanemarimo debljinu sočiva, možemo dobiti jednostavniju formulu za sočivo, koja povezuje udaljenosti predmeta i lika od sočiva sa žižnom daljinom sočiva. Na slici 2.37 je prikazano formiranje lika na sabirnom sočivu, pri čemu je: $\overline{AT} = p$ udaljenost predmeta od sočiva, $\overline{A'T} = \ell$ udaljenost lika od sočiva, $\overline{AB} = P$ visina predmeta, $\overline{A'B'} = L$ visina lika i $\overline{FT} = f$ žižna daljina sočiva.



Slika 2.37. *Formiranje lika na tankom sabirnom sočivu. Izvođenje aproksimativne formule za tanko sočivo je moguće na osnovu položaja predmeta i lika.*

Na osnovu sličnosti trouglova $\triangle ABF$ i $\triangle CTF$, te trouglova $\triangle ABF$ i $\triangle A'B'T$ (pravilo UUU) važe sljedeći odnosi:

$$\frac{P}{L} = \frac{\overline{AF}}{f} = \frac{p-f}{f}, \tag{2.64}$$

odnosno

$$\frac{P}{L} = \frac{p}{\ell}, \tag{2.65}$$

što nakon izjednačavanja daje:

$$\frac{p-f}{f} = \frac{p}{\ell},$$
$$\ell p - \ell f = pf,$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell}. \tag{2.66}$$

Napomenimo da za imaginaran lik, negativan predznak možemo ubaciti u jednačinu ili da prilikom izračunavanja koristimo negativne vrijednosti za ℓ. Za rasipno sočivo, s obzirom da je lik uvijek imaginaran, aproksimativna formula je oblika

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\ell}. \tag{2.67}$$

Ako se udaljenosti $\overline{AF}$ i $\overline{A'F'}$ sa slike 2.37 označe s x_1 i x_2, vrijedi da je

$$f^2 = x_1 \cdot x_2. \tag{2.68}$$

Dobivena relacija predstavlja **Njutnovu formulu za sočiva** (engleski naučnik Sir Isaac Newton).

Transverzalno uvećanje sočiva se definiše kao odnos visine lika i visine predmeta. Na osnovu relacije (2.65) vidimo da je taj odnos jednak odnosu njihovih udaljenosti od tjemena sočiva

$$U = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p}. \tag{2.69}$$

pri čemu se u literaturi nekad dodaje i znak minus ispred odnosa udaljenosti, kako bi se naglasilo da se radi o obrnutom liku. Dakle negativno uvećanje znači da je lik suprotno okrenut u odnosu na predmet. Analogno tome, negativna visina lika znači da je on obrnut.

Oštrina lika, koji se dobija pomoću sočiva, zavisi od širine svjetlosnog snopa i to tako da što je snop uži, lik je jasniji. Zato se koriste **dijafragme** kao regulatori koji prema potrebi sužavaju svjetlosni snop, tako što na razne načine regulišu slobodnu površinu sočiva.

2.2.16 Sistem od dva sočiva

U praksi se najčešće kombinuju sočiva s ciljem dobijanja jasnijeg i manje deformisanog lika. Uglavnom su to sočiva postavljena tako da im se optičke ose poklapaju, te mogu da budu na nekom rastojanju ili da se dodiruju. Svjetlost prolazi kroz prvo sočivo formirajući lik predmeta. Taj lik postaje predmet za drugo sočivo. Lik nastao nakon prelamanja na drugom sočivu nazivamo *krajnji lik* predmeta. Primjer dobijanja krajnjeg lika na sistemu od dva sočiva dat je na slici 2.45 koja pokazuje princip rada mikroskopa.

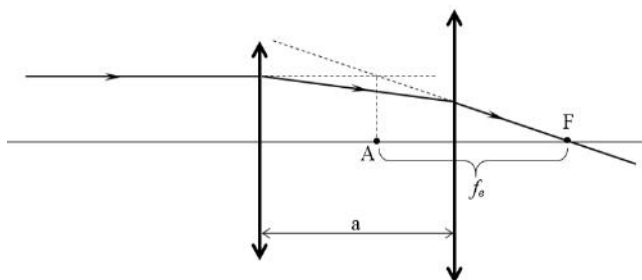
Svaki sistem sočiva ima **ekvivalentnu žižnu daljinu** čije je određivanje prikazano na slici 2.38. S obzirom da je žiža ona tačka u kojoj se sijeku sve upadne zrake koje su paralelne s optičkom osom, tako se i kod sistema sočiva, žiža može odrediti kao presjek zrake parelelne s optičkom osom, nakon njenog prolaska kroz oba sočiva, i optičke ose. Pokazuje se da ona zavisi od žižnih daljina svakog pojedinačnog sočiva u sistemu i od njihovog rastojanja. Ukoliko

se sistem sastoji od dva sočiva koji se nalaze na rastojanju a, ekvivalentna žižna daljina iznosi

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}, \tag{2.70}$$

ukoliko se sočiva dodiruju tj. $a = 0$, ekvivalentna žižna daljina postaje

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{2.71}$$



Slika 2.38. *Određivanje žiže (fokusa) za sistem od dva sabirna sočiva koji se nalaze na rastojanju a. Ekvivalentna žižna daljina je rastojanje* $f_e = \overline{AF}$.

Ekvivalentna žižna daljina se ne mjeri od prvog sočiva, nego od tačke A (vidi sliku 2.38), koja predstavlja projekciju presječne tačke između upadne i izlazne zrake. Ukoliko bi se u tačku A postavilo jedno sočivo, žižne daljine jednake ekvivalentnoj žižnoj daljini, lik proizvoljnog predmeta bi se nalazio na istom mjestu kao i nakon preslikavanja na oba sočiva zajedno. To znači da se i na sistem sočiva može primijeniti opšta formula za sočivo (2.66):

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell}. \tag{2.72}$$

2.2.17 Nedostaci sočiva

Već smo ranije rekli da za dobijanje lika koristimo paraksijalne monohromatske zrake i sočiva s malim otvorom, kako bi lik neke tačke također bio tačka. Međutim, u praksi se često dobijaju likovi koji ne leže na osi niti u njenoj blizini, što znači da se koriste i ostali dijelovi svjetlosnog snopa, a ne samo paraksijalne zrake. U tom slučaju dolazi do odstupanja od idealne slike odnosno **aberacije**. Najčešće se te aberacije tretiraju pojedinačno, zavisno od praktičnih okolnosti, jer bi otklanjanje svih aberacija istvremeno bilo veoma složeno. Aberacije se mogu podijeliti na *monohromatske* i *hromatske*. U monohromatske spadaju:

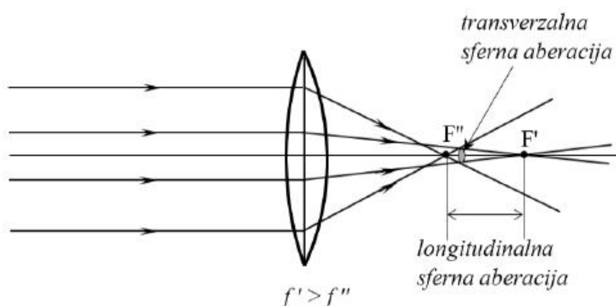
- sferna aberacija,
- koma,
- astigmatizam,
- izvijanje lika,
- distorzija,

dok u hromatske spadaju:

- transverzalna hromatska aberacija,
- longitudinalna hromatska aberacija.

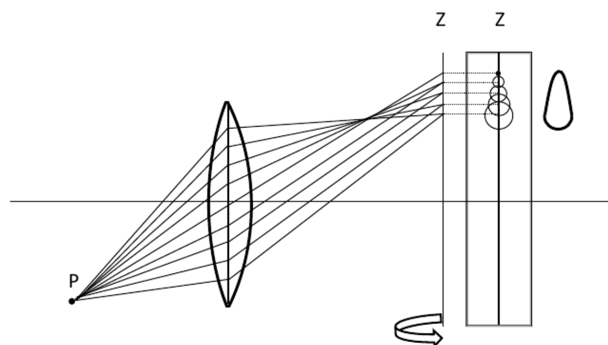
U nekoj literaturi, nedostaci sočiva se smatraju defektima. Međutim, to su ipak optičke pravilnosti, povezane s zakonitostima prelamanja svjetlosti, a ne posljedica loše izrade sočiva. S toga ih se ne treba smatrati defektima nego svojstvima sočiva, koje se raznim kombinacijama sočiva uklanjaju u cilju postizanja jasnog i pravilnog lika.

Sferna aberacija predstavlja nemogućnost sočiva da skupi sve paralelne zrake u jednu tačku zbog smanjenja debljine sočiva od centra prema krajevima. Zrake koje prolaze kroz deblji dio sočiva se prelamaju slabije nego zrake koje prolaze kroz tanji dio sočiva (slika 2.39). Zbog toga je lik tačke mala kružna površina. Naime snop zraka nakon prelamanja prestaje biti homocentričan (snop zraka koji ima jednu zajedničku presječnu tačku), ali zadržava simetriju u odnosu na osu, pa je slika tačke ustvari krug. Može se otkloniti kombinacijom konvergentnih i divergentnih sočiva ili sužavanjem snopa pomoću dijafragme. Sferna aberacija nastaje i kod površina koje nisu sferne te ima opšti karakter.



Slika 2.39. *Nastanak sferne aberacije kod sabirnog sočiva. Izduženje lika u pravcu ose naziva se longitudinalna, a izduženje u pravcu okomitom na osu, transverzalna sferna aberacija.*

Koma je aberacija koja nastaje kad se predmet ne nalazi na osi sočiva. Lik takvog predmeta nije tačka nego površina u obliku komete (ili suze). Na slici 2.40 je prikazano formiranje lika nekog tačkastog predmeta koji ne leži na osi sočiva. Jedino centralna zraka stvara tačkasti lik, sve ostale zrake stvaraju likove u obliku krugova različitih prečnika. Konačan lik je razvučen u ravni okomitoj na osi sočiva i uži je pri vrhu nego pri dnu tj. ima oblik komete. Za komu je karakteristično da se može ukloniti samo za određeni položaj predmeta i lika, a za ostale položaje (kod istog sočiva) koma nije uklonjena. Kad se kod jednog sočiva sferna aberacija svede na najmanju moguću mjeru to sočivo i dalje ima komu.



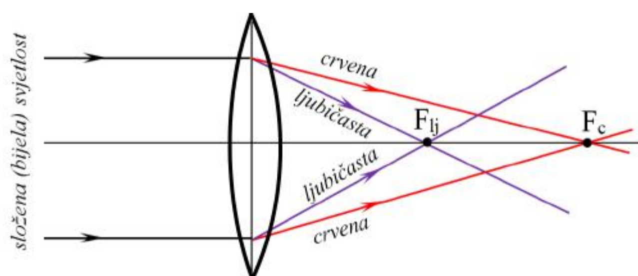
Slika 2.40. *Lik tačkastog predmeta, koji nije na osi sočiva, nije tačka, nego se na zaklonu (Z) dobije lik oblika komete. Ta aberacija sočiva naziva se koma.*

Astigmatizam je aberacija pri kojoj je lik predmeta, koji se ne nalazi na optičkoj osi, razvučen u pravcu ose. Nastaje kad zrake padaju na prelomnu površinu pod velikim uglom u odnosu na njenu normalu.

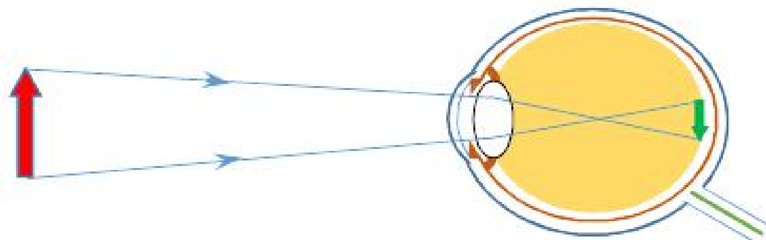
Izvijanje lika ili iskrivljivanje površine lika je pojava pri kojoj se neki dijelovi lika vide jasnije nego drugi, te površina lika nije više ravna.

Distorzija je pojava različitog uvećanja pojedinih dijelova lika. Lik može biti jasan (oštar) ali nije sličan predmetu, nego se deformiše s geometrijske strane. Uvećanje može biti sve veće, ili pak manje, ukoliko je veće rastojanje od ose. U prvom slučaju lik dobije izvitoperen oblik, a u drugom slučaju, "bačvast".

Hromatska aberacija je posljedica disperzije svjetlosti i ogleda se u tome da se za polihromatsku (složenu) svjetlost ne dobija jedna žiža već svaka boja ima svoju žižu (slika 2.41). Hromatska aberacija može biti *longitudinalna* - jedan predmet daje likove različitih boja na različitim rastojanjima, i *transverzalna* -različita uvećanja lika za različite boje svjetlosti. Hromatsku aberaciju možemo ukloniti kombinacijom konvergentnih i divergentnih sočiva od različitog materijala. Postupak dobijanja iste žižne daljine za dvije različite boje naziva se *ahromatizacija*.



Slika 2.41. *Nastanak hromatske aberacije kod sabirnog sočiva.*



Slika 2.42. *Stvaranje slike u oku. Svjetlost pada na rožnjaču, koja usmjerava snop svjetlosti kroz zjenicu ka sočivu. Slika, koja se formira na mrežnjači, je obrnuta i umanjena. Ona se dalje prenosi do centra za vid u mozgu preko očnog živca.*

2.2.18 Optički instrumenti

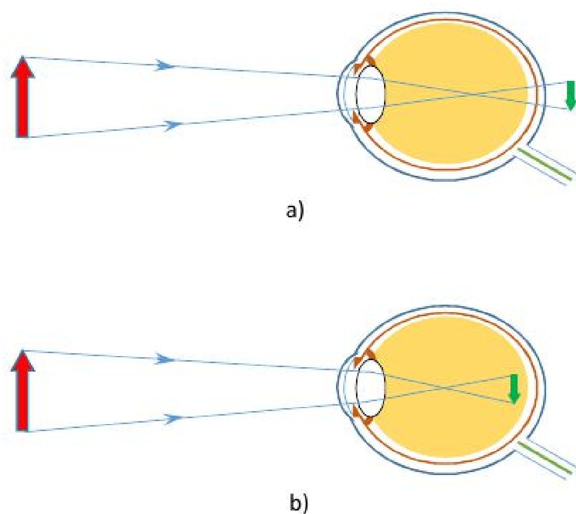
Optički instrumenti predstavljaju kombinacije sočiva, ogledala, dijafragme i ostalih pomoćnih dijelova, koji doprinose postizanju jasnijeg i pravilnijeg lika. Treba imati na umu da u sistem sočiva optičkog instrumenta ulazi i očno sočivo i oni zajedno čine okularne optičke instrumente. Uvećanje okularnog optičkog instrumenta je ugaono uvećanje (spomenuto kod prividne dubine). Ono se dobije kao odnos tangensa ugla pod kojim se vidi predmet kroz optički instrument i tangens ugla pod kojim se vidi predmet bez optičkog instrumenta.

Postoje još i projekcioni optički instrumenti, kod kojih se, pomoću sabirnog sočiva, dobiva realan (uvećan ili umanjen) lik nekog predmeta (dijaprojektori, fotoaparati).

Oko

Oko je najvažniji optički sistem, čiji glavni dio predstavlja sabirno sočivo. Predmet vidimo tako što svjetlosne zrake koje dođu do oka, prolaze kroz rožnjačum, zjenicu i očno sočivo (slika 2.42) te padaju na mrežnjaču. Na mrežnjači se formira obrnut i umanjen lik tog predmeta, koji se očnim živcem prenosi do mozga, tačnije do centra za vid. Razmak između očnog sočiva i mrežnjače je uvijek isti, te da bi se u svakom slučaju mogao dobiti oštar i jasan lik, sočivo mora imati promjenjivu žižnu daljinu. Žižna daljina očnog sočiva se može mijenjati pomoću očnih mišića. Njihovim stezanjem ili rastezanjem, mijenja se oblik sočiva, a time i njegova žižna daljina.

Najudaljenija tačka, za koju se pri opuštenom oku, može dobiti oštra (jasna) slika naziva se daljna tačka oka. Ako daljna tačka oka ne leži u beskonačnosti, događa se da slika predmeta, ne pada tačno na mrežnjaču. Ukoliko se slika predmeta, koji se nalazi u beskonačnosti (tj. na velikoj udaljenosti od oka) formira iza mrežnjače, takvo je oko dalekovidno (slika 2.43a). To se može korigovati rasipnim sočivom, koje pomjera sliku na mrežnjaču. Ukoliko se slika dalekog predmeta formira ispred mrežnjače, oko je kratkovidno (slika 2.43b). Taj nedostatak se može ukloniti pomoću sabirnog sočiva koje skuplja snop svjetlosti na mrežnjaču oka.



Slika 2.43. *a) Dalekovidnost - predmeti koji su bliže oku su mutni, dok su udaljeniji predmeti jasniji. b) Kratkovidnost - predmeti koji su bliže oku su jasniji i izoštreniji, dok su udaljeniji predmeti mutni.*

Lupa

Sabirno sočivo je najprostiji optički instrument, koji povećava ugao pod kojim vidimo predmet. Povećanje ugla može se postići i približavanjem predmeta oku, ali to je moguće samo do neke određene granice, jer se pri tome oko napreže. Koristi se za posmatranje sitnih predmeta na malom rastojanju. Zavisno od načina upotrebe sočivo može biti **prosti mikroskop** ili **lupa** (sočivo je neposredno uz oko), **povećavajuće staklo za čitanje** (sočivo je blizu predmeta). U svakom slučaju, predmet mora biti postavljen ispred žiže sočiva. Dobijeni lik je imaginaran, uspravan i s iste strane sočiva kao i predmet.

Sa slike 2.44a vidimo da je tangens ugla pod kojim se vidi predmet (tj. njegov lik) pomoću lupe

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{L}{\ell}, \tag{2.73}$$

pri čemu smo uzeli da je oko blizu sočiva te da je udaljenost lika od oka jednaka udaljenosti lika od sočiva. Tangens ugla pod kojim vidimo predmet bez lupe je

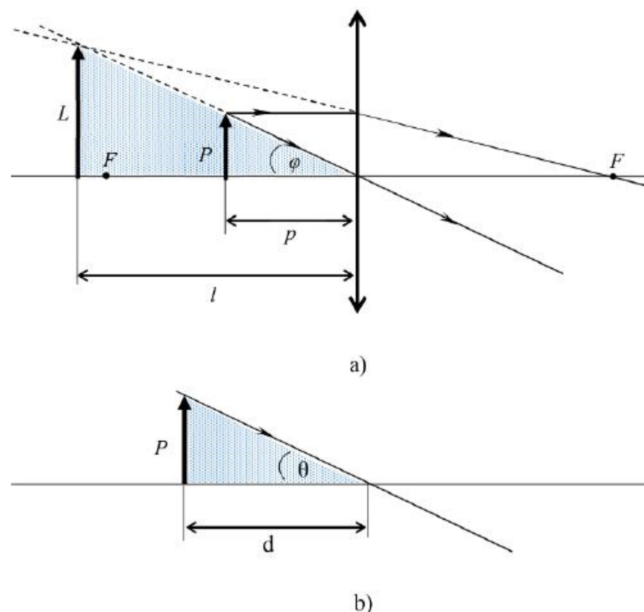
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{P}{d}, \tag{2.74}$$

gdje smo s d označili *daljinu jasnog vida* (normalno oko najjasnije vidi na daljini od 25cm do 35cm). Ugaono uvećanje lupe je onda

$$\Gamma = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\mathrm{tg}\theta} = \frac{\frac{L}{\ell}}{\frac{P}{d}} = \frac{L}{P} \cdot \frac{d}{\ell}. \tag{2.75}$$

Uzimajući u obzir relacije (2.65) i (2.66) te činjenicu da je lik imaginaran, uvećanje lupe postaje

$$\Gamma = \frac{\ell}{p} \cdot \frac{d}{\ell} = d \cdot \frac{1}{p} = d\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\ell}\right). \tag{2.76}$$



Slika 2.44. *Posmatranje nekog predmeta a) pomoću lupe, b) bez lupe. Udaljenost d je daljina jasnog vida.*

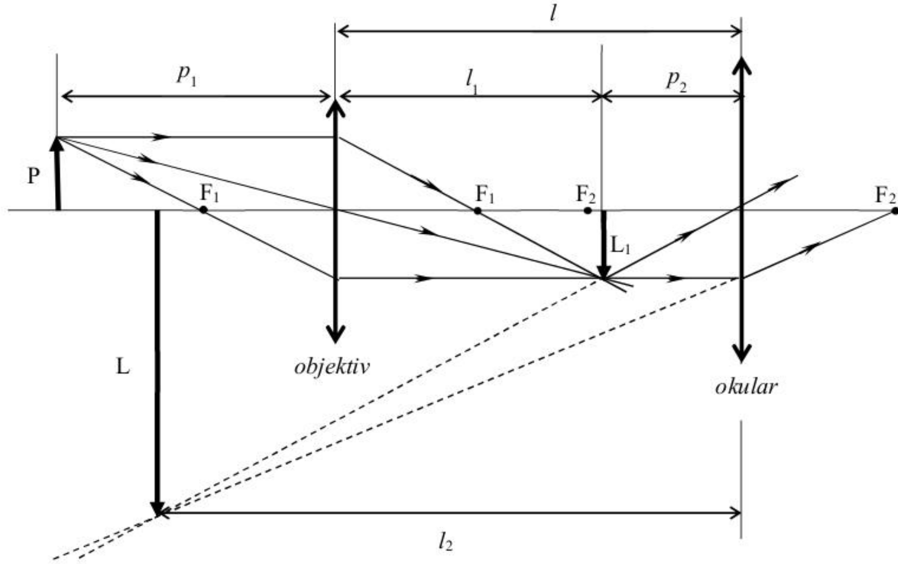
Dakle, uvećanje lupe je veće, što je žižna daljina manja. Međutim, usljed aberacija maksimalno uvećanje lupe je oko 20 puta. Za veća uvećanja koristimo mikroskop.

Mikroskop

Pomoću mikroskopa dobijamo mnogo veće uvećanje nego pomoću lupe. Današnji mikroskopi imaju prilično složenu kombinaciju sočiva i ostalih pomoćnih dijelova, koji omogućavaju dobijanje što jasnijeg lika, sa što većim uvećanjem, otklanjajući razne nedostatke sočiva.

Ipak, princip rada mikroskopa je relativno jednostavan. On se sastoji iz dva glavna dijela (vidi sliku 2.45), **objektiva**, žižne daljine f_1 i **okulara**, žižne daljine f_2. Njih možemo smatrati konvergentnim sočivima, iako su to obično složeni sistemi sočiva. Udaljenost ℓ između objektiva i okulara nazivamo **dužina cijevi mikroskopa**, a udaljenost između druge žiže okulara i prve žiže objektiva **optička dužina mikroskopa**. Predmet se postavlja malo dalje od žiže objektiva. Dobiveni lik je obrnut i realan, te se mora nalaziti između žiže okulara i samog okulara (tj. ispred žiže okulara). On postaje sekundarni predmet za okular. Konačan lik je imaginaran i uspravan u odnosi na sekundarni predmet, a obrnut u odnosu na prvobitni predmet. Oko posmatrača je u blizini okulara te smatramo da je na mjestu samog okulara. Također pretpostavljamo da su sočiva simetrična (prva i druga žižna daljina su jednake).

Ugaono uvećanje mikroskopa je odnos tangensa ugla pod kojim se vidi krajnji lik predmeta (označen na slici 2.45 s L) i tangensa ugla pod kojim se vidi predmet P bez mikroskopa (u tom slučaju se predmet nalazi na daljini jasnog



Slika 2.45. *Formiranje lika pomoću mikroskopa. Predmet se postavlja neposredno iza žiže objektiva, f_1. Prvi dobijeni lik L_1 je sekundarni predmet za okular. Konačan lik L je obrnut u odnosu na posmatrani predmet, imaginaran i uvećan.*

vida):

$$\Gamma_M = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\mathrm{tg}\theta} = \frac{\frac{L}{\ell_2}}{\frac{P}{d}} = \frac{L}{P} \cdot \frac{d}{\ell_2}. \tag{2.77}$$

Pomnožimo gornju relaciju s $\frac{L_1}{L_1}$:

$$\Gamma_M = \frac{L_1}{P} \cdot \frac{L}{L_1} \cdot \frac{d}{\ell_2}, \tag{2.78}$$

i uočimo da je $\frac{L_1}{P} = u_{ob}$ linearno uvećanje objektiva, a druga dva člana daju ugaono uvećanje okulara, jer je

$$\Gamma_{ok} = \frac{\frac{L}{\ell_2}}{\frac{L_1}{d}} = \frac{L}{L_1} \cdot \frac{d}{\ell_2}. \tag{2.79}$$

Dakle, ugaono uvećanje mikroskopa je proizvod linearnog uvećanja objektiva u_{ob} i ugaonog uvećanja okulara Γ_{ok}:

$$\Gamma_M = u_{ob} \cdot \Gamma_{ok}. \tag{2.80}$$

Da bismo dobili zavisnost uvećanja mikroskopa od žižnih daljina objektiva i okulara, potrebno je ugaono uvećanje okulara izraziti preko njegove žižne daljine, f_2 (analogno relaciji (2.76)):

$$\Gamma_{ok} = d\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{\ell_2}\right). \tag{2.81}$$

U praksi je $f_2 \ll \ell_2$ tako da se član $1/\ell_2$ može zanemariti, pa se za uvećanje mikroskopa koristi aproksimacija

$$\Gamma_M = \frac{\ell_1}{p_1} \cdot \frac{d}{f_2}. \tag{2.82}$$

Mogu se uzeti i još neke aproksimacije: $p_1 \approx f_1$ jer se predmet uglavnom postavlja vrlo blizu žiže objektiva; $\ell_1 \approx \ell$ (gdje je ℓ dužina cijevi mikroskopa) jer je žižna daljina okulara puno manja u odnosu na ℓ_1, te približna formula za uvećanje mikroskopa onda glasi

$$\Gamma_M = \frac{\ell \cdot d}{f_1 \cdot f_2}. \tag{2.83}$$

Vidi se da je za velika uvećanja mikroskopa potrebno da žižne daljine budu što manje, a dužina cijevi što veća, ali u granicama koje treba da ispuni precizan optički instrument. Glavno ograničenje za uvećanje mikroskopa leži u talasnoj prirodi svjetlosti. **Moć razlaganja (razdvajanja) mikroskopa**, predstavlja najmanji razmak između dvije tačke, Δs, za koje se još dobijaju razdvojeni likovi. Zavisi od talasne dužine svjetlosti (λ) i ugla između optičke ose i periferne (krajnje) zrake koja prolazi kroz sočivo objektiva (φ)

$$\Delta s = \frac{1{,}22\lambda}{2n \sin\varphi}. \tag{2.84}$$

Veličinu $n \sin\varphi$ nazivamo *numerička apertura* mikroskopa. Dakle, što je razmak Δs manji, odnosno što je ugao φ veći, to je moć razlaganja veća. O efektima talasne prirode svjetlosti će biti više riječi u narednom poglavlju.

Što se tiče samog okulara, to je lupa kojom se posmatra lik dobijen nakon uvećavanja objektivom. Postoje dvije glavne vrste okulara, **Hajgensov** (holandski naučnik Christiaan Huygens) i **Ramsdenov** (engleski naučnik Jesse Ramsden). Hajgensov okular sastavljen je od dva plankonveksna sočiva s žižnim daljinama čiji odnos varira od $3:1$ do $1,5:1$ i nalaze se na takvom rastojanju na kojem je suzbijena hromatska aberacija. Ramsdenov okular se sastoji od dva jednaka plankonveksna sočiva na međusobnom rastojanju od $2/3$ žižne daljine pojedinog od tih sočiva i ima za cilj smanjenje sferne aberacije. Za odstranjenje hromatske aberacije potrebno je ugraditi dodatne dijelove.

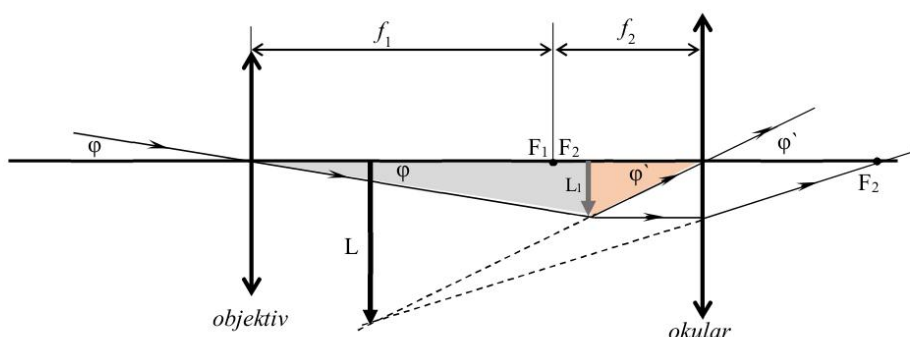
Durbin

Durbin je optički sistem za posmatranje velikih predmeta na velikom rastojanju. Sastoji se od **objektiva** (žižne daljine f_1) i **okulara** (žižne daljine f_2). To su sabirna sočiva postavljena tako da se druga žiža objektiva poklapa s prvom žižom okulara. Konstrukcija lika predmeta pomoću durbina prikazana je na slici 2.46. Predmet se nalazi na velikoj udaljenosti od objektiva, a njegov lik (L_1) se formira veoma blizu druge žiže objektiva (odnosno prve žiže okulara). Lik L_1 je sekundarni predmet za okular. S obzirom da se on nalazi ispred žiže okulara, konačni lik (L) je imaginaran i obrnut u odnosu na primarni predmet. Uglovi φ i φ' su uglovi pod kojim se vidi predmet, odnosno krajnji lik. Kad se zanemari rastojanje lika L_1 od zajedničkog fokusa objektiva i okulara, iz osjenčenih trouglova na slici 2.46, može se zaključiti da je ugaono uvećanje

durbina

$$\Gamma_D = \frac{\text{tg}\varphi'}{\text{tg}\varphi} = \frac{\frac{L_1}{f_2}}{\frac{L_1}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}, \tag{2.85}$$

pri čemu je također uzeto da su sočiva simetrična.



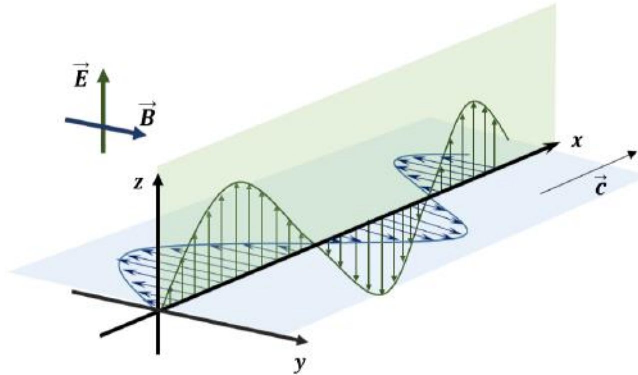
Slika 2.46. *Durbin se sastoji iz objektiva i okulara. Predmet se nalazi na velikoj udaljenost, pa se prvi lik formira blizu žiže okulara. Krajnji lik je imaginaran uvećan i obrnut u odnosu na posmatrani predmet.*

2.3 Fizička optika

Kao što smo već rekli, svjetlost ima dualnu prirodu te nekad ispoljava talasna, a nekad čestična svojstva. Fizička (talasna) optika razmatra svjetlosne pojave, koje su posljedica njene talasne prirode. To su interferencija, difrakcija i polarizacija. Međutim, prije svega je potrebno da objasnimo šta su to elektromagnetni talasi.

2.3.1 Elektromagnetni talasi

Kad tijelo naelektrišemo, oko njega se stvori električno polje. Ono se ne stvara trenutno već se od momenta naelektrisavanja tijela širi kroz prostor konačnom brzinom jednakom brzini svjetlosti. Istom brzinom se širi i magnetno polje kad kroz neki provodnik propustimo električnu struju. Ako bismo tijelo naelektrisavali periodično po sinusnom zakonu, tad bi se kroz prostor širila deformacija fizičkog prostora u vidu sinusnog električnog talasa, a na sličan način bi se oko provodnika širio magnetni talas kad bi kroz njega tekla sinusna naizmjenična struja. S druge strane, periodično dovođenje i odvođenje naboja predstavlja naizmjeničnu struju u dovodu. To znači da ne možemo proizvesti samo električni niti samo magnetni talas, već isključivo oba zajedno, odnosno električni i magnetni talasi moraju biti međusobno spregnuti. Takve talase nazivamo **elektromagnetni talasi**. Oni, dakle, nastaju u fizičkom prostoru pri oscilatornom kretanju naboja. Uopšteno gledano, elektromagnetni talasi se emituju pri promjenljivom kretanju elektrona (ubrzanom ili usporenom) ili drugih naelektrisanih čestica i pri kvantnim prelazima atomskih sistema s višeg u neko niže energetsko stanje o čemu će biti više govora kasnije.



Slika 2.47. *Elektromagnetni talas sastoji se od dvije komponente - oscilovanje vektora jačine električnog polja i oscilovanje vektora magnetne indukcije u okomitim ravnima. c je brzina prostiranja talasa.*

Elektromagnetni talas je transverzalan talas koji se sastoji od dvije komponente, električnog polja $\vec{E}$ koje osciluje sinusoidualno tokom vremena u prostoru

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx), \tag{2.86}$$

i magnetnog polja indukcije $\vec{B}$, koje osciluje istom frekvencijom kao i električno (slika 2.47)

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx). \tag{2.87}$$

Veličine $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ su amplitude vektora $\vec{E}$ i $\vec{B}$. U svakoj tački prostora vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ su međusobno okomiti i okomiti na pravac prostiranja talasa. **Intenzitet elektromagnetnog talasa** je srednja vrijednost kvadrata vektora električnog polja:

$$I = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} E_0^2. \tag{2.88}$$

Za prostiranje elektromagnetnih talasa nije potrebna elastična sredina, te se mogu prostirati i kroz vakuum. U nekoj materijalnoj sredini dielektrične konstante ε i magnetne permeabilnosti μ, brzina prostiranja elektromagnetnih talasa je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{2.89}$$

što za vakuum iznosi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99868478 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \tag{2.90}$$

Kao i mehanički talasi, elektromagnetni talasi imaju talasnu dužinu jednaku količniku njegove brzine i frekvencije:

$$\lambda = \frac{c}{f}. \tag{2.91}$$

U zavisnosti od frekvencije ili talasne dužine emitovanih elektromagnetnih talasa, a također i od načina njihovog nastajanja, razlikujemo: radiotalase (najveća talasna dužina), infracrveno zračenje, vidljivu svjetlost, ultraljubičasto ili

ultravioletno zračenje, rendgensko ili X-zračenje i gama-zračenje (najmanja talasna dužina) što čini **spektar elektromagnetnog zračenja**. Granice pojedinih oblasti su samo aproksimativne, pošto se neke oblasti međusobno prekrivaju. Dakle, ono što mi nazivamo svjetlost je zapravo dio elektromagnetnog spektra talasnih dužina od približno 400 nm do 700 nm nazvan vidljiva svjetlost.

2.3.2 Interferencija svjetlosti

Neka u neku tački prostora dolaze dva svjetlosna talasa istih frekvencija, kod kojih vektori električnog polja osciluju u istom pravcu kao

$$E_1 = E_{01}\cos(\omega t - \varphi_1) \quad i \quad E_2 = E_{02}\cos(\omega t - \varphi_2). \tag{2.92}$$

Primjenom principa superpozicije, jačina električnog polja rezultujućeg talasa će biti

$$E = E_1 + E_2 = E_0\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.93}$$

gdje je E_0 amplituda rezultujućeg oscilovanja, a φ njegov fazni pomak. Ukoliko oscilovanje jačine električnih polja E_1 i E_2 predstavimo preko rotirajućeg vektora amplitude (kao kod harmonijskih oscilacija), dobijamo amplitudu rezultujućeg oscilovanja, a time i talasa:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right). \tag{2.94}$$

Ukoliko sada amplitudu talasa izrazimo preko intenziteta talasa koristeći (2.88), intenzitet rezultujućeg talasa će biti

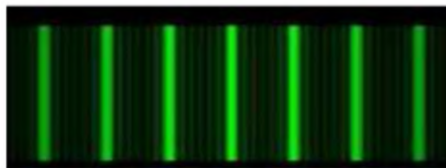
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi, \tag{2.95}$$

gdje je $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ razlika faza. Ukoliko razlika faza nije konstantna u vremenu član $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ može da mijenja vrijednosti između $+1$ i -1 pri čemu je onda srednja vrijednost tog člana jednaka nuli pa je intenzitet rezultujućeg talasa

$$I = I_1 + I_2. \tag{2.96}$$

Talasi, kod kojih je fazna razlika konstantna u vremenu, ali različita za svaku tačku prostora, nazivaju se **koherentni talasi**, a izvori tih talasa **koherentni izvori**. Za one tačke, za koje je $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, intenzitet rezultujućeg talasa je manji od zbira intenziteta svakog pojedinačnog talasa tj. $I < I_1 + I_2$. S druge strane, za sve tačke, za koje je $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, intenzitet rezultujućeg talasa je veći od zbira intenziteta svakog pojedinačnog talasa tj. $I > I_1 + I_2$. Dakle, kad dođe do superpozicije koherentnih talasa, na nekim mjestima intenzitet rezultujućeg talasa je minimalan, a na nekim mjestima maksimalan. Ta pojava se naziva **interferencija** svjetlosti, a njeni efekti se obično posmatraju na nekom ekranu, na kojem se pojavljuju svijetle i tamne pruge tzv. **interferentne pruge** kao na slici 2.48.

Strogo uzevši, koherentna svjetlost može biti emitovana samo s jednog atoma. Međutim, ma koliko neki svjetlosni izvor bio mali, postoji ogroman broj atoma, koji emituju svjetlost u istom trenutku, te se u vrlo složenom procesu, obrazuje skupni efekt, odnosno svjetlost koja se posmatra s makroskopskog gledišta. Možemo smatrati da je svjetlost, koja dolazi iz jednog izvora koherentna. Obična svjetlost iz dva nezavisna izvora ne može biti koherentna. Svjetlost zadržava



Slika 2.48. *Slika interferencije. Svijetle pruge su posljedica konstruktivne interferencije (u ovom konkretnom slučaju su zelene boje; boja zavisi od talasne dužine korištene svjetlosti), a tamne pruge posljedica destruktivne interferencije.*

koherentnost na svom daljem putu iako se odbija, prelama ili prolazi kroz razne otvore. Ta činjenica je iskorištena da se vještačkim putem dobiju koherentni izvori. Naime, Jang (engleski naučnik Thomas Young) je uspio dobiti interferentnu sliku tako što je propustio svjetlost iz jednog izvora kroz dva mala otvora. Na taj način je dobio dva koherentna izvora. Nakon tog eksperimenta (koji će kasnije biti detaljnije objašnjen) Frenel (francuski naučnik Augustin Jean Fresnel) je dobio dva koherentna izovora kao rezultat refleksije svjetlosti od dva ravna ogledala postavljena pod uglom malo manjim od 180°. Zatim je isti efekt postigao i s prizmom, čiji je ugao pri vrhu bio blizu 180°. Uglavnom, interferencija se može postići tako što se svjetlost iz izvora razdvoji u dva snopa pomoću ogledala, sočiva ili prizme, te se ta dva svjetlosna snopa dovedu u jednu tačku. Optički instrumenti u kojima se pod povoljnim okolnostima ostvaruju uslovi interferencije svjetlosti, kako bi se ti efekti mogli iskoristiti za mjerenje dužine, uglova, indeksa prelamanja svjetlosti ili za ispitivanje kvaliteta površina, nazivaju se **interferometri**.

Analogno mehaničkim talasima, uslovi za **konstruktivnu i destruktivnu interferenciju** odnose se na vrijednost putne razlike između pojedinih talasa:

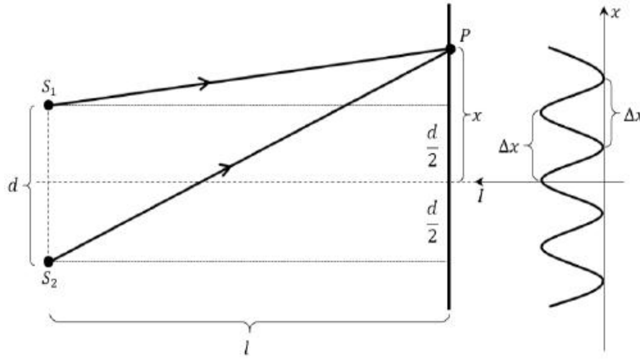
$$\delta = \pm z\lambda \quad z = 0, 1, 2, 3, ..., \quad \textbf{konstruktivna interferencija}, \qquad (2.97)$$

$$\delta = \pm(2z+1)\frac{\lambda}{2}, \quad z = 0, 1, 2, 3, ... \quad \textbf{destruktivna interferencija}. \qquad (2.98)$$

Ovi uslovi mogu biti zamijenjeni u slučaju kad jedan od talasa promijeni fazu za π usljed odbijanja od gušću sredinu. U slučaju da oba talasa promijene fazu za π, talasi će opet biti u fazi i vrijedit će isti uslovi interferencije.

Interferencija svjetlosti se može javiti i onda kad nema putne razlike između talasa ($\delta = 0$), tj. kad talasi prelaze jednake geometrijske dužine puteva. U tom slučaju talasi moraju imati *različite optičke dužine puteva.* **Optička dužina puta** je proizvod indeksa prelamanja neke sredine i geometrijske dužine puta $L = n \cdot s$. Tada će se uslovi (2.97) i (2.98) odnositi na optičku putnu razliku $\Delta = L_2 - L_1$.

Oblast u kojoj se talasi prekrivaju naziva se polje interferencije, u kojem se naizmjenično pojavljuju minimumi i maksimumi interferencije u vidu **svijetlih i tamnih pruga** kao na slici 2.48.



Slika 2.49. *U tačku P, koja je na rastojanju x od centralne svijetle pruge, dolaze svjetlosne zrake iz dva koherentna izvora S_1 i S_2. U toj tački se može formirati svijetla ili tamna pruga, zavisno od putne razlike između ta dva talasa. Na grafiku je prikazan intenzitet svjetlosti u zavisnosti od rastojanja x.*

Objasnimo sada Jangov eksperiment interferencije čija je šema prikazana na slici 2.49. Izvor svjetlosti se nalazi ispred neprovidnog ekrana na kojem su dva mala otvora koji predstavljaju dva koherentna izvora svjetlosti. Interferentna slika se dobije na ekranu E postavljenom na rastojanju ℓ naspram izvora. Posmatrajmo dvije svjetlosne zrake iz izvora S_1 i S_2 koje padaju u tačku P na ekranu. U njoj se formira svijetla ili tamna pruga zavisno od putne razlike tih svjetlosnih zraka. Od izvora do tačke P talasi prelaze različite puteve s_1 i s_2:

$$s_1^2 = \ell^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_2^2 = \ell^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \tag{2.99}$$

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 2xd. \tag{2.100}$$

Da bi uopšte zapazili interferentnu sliku mora biti $\ell >> d$ i $\ell >> x$, tako da je $s_2 + s_1 \approx 2\ell$, pa je putna razlika

$$\delta = (s_2 - s_1) = \frac{2xd}{2\ell} = x\frac{d}{\ell}, \tag{2.101}$$

odnosno optička putna razlika

$$\Delta = n(s_2 - s_1) = nx\frac{d}{\ell}. \tag{2.102}$$

S obzirom da se talasi prostiru kroz istu optičku sredinu, dovoljno je da posmatramo njihovu putnu razliku. Da bi u tački P bila maskimalna osvijetljenost, prema (2.97), ona se mora nalaziti na rastojanju x_{max}:

$$(x_{max})_z = \pm z\lambda\frac{\ell}{d}, \quad z = 0, 1, 2, 3..., \tag{2.103}$$

pri čemu je, u ovom slučaju, z red svijetle pruge. Ukoliko se uzme da je $z = 0$ onda je i $x_{max} = 0$. To je svijetla pruga nultog reda i naziva se **centralna svijetla pruga**. Na osnovu toga se rastojanje $(x_{max})_z$ može definisati kao rastojanje svijetle pruge reda z, od centralne svijetle pruge. Analogno se za

tamne pruge, na osnovu uslova destruktivne interferencije (2.98), dobija njihova udaljenost od centralne svijetle pruge kao

$$(x_{min})_z = \pm(2z+1)\frac{\lambda}{2}\frac{\ell}{d}, \quad z = 0, 1, 2, 3... \tag{2.104}$$

Širina interferentne pruge se dobije kao rastojanje između dvije susjedne svijetle (ili tamne pruge):

$$\Delta x = (x_{max})_{z+1} - (x_{max})_z = \frac{\ell}{d}\lambda. \tag{2.105}$$

Mjerenjem širina interferentnih pruga može se odrediti talasna dužina svjetlosti ukoliko je poznato rastojanje između izvora svjetlosti, odnosno rastojanje između svjetlosnih izvora ako je poznata talasna dužina svjetlosti.

Na slici 2.49 desno je prikazana raspodjela intenziteta svjetlosti I u zavisnosti od udaljenosti od centralne svijetle pruge. Intenzitet svih svijetlih pruga je isti. Napomenimo da se pod pojmom intenzitet svjetlosti podrazumijeva srednja vrijednost kvadrata vektora električnog polja.

2.3.3 Interferencija svjetlosti na tankim listićima

Pojava različitih boja na mjehuru od sapunice ili na tankom sloju ulja na vodi je rezultat interferencije talasa. Ova pojava je poznata kao interferencija svjetlosti na tankim providnim listićima, pri čemu njihova debljina ne smije prelaziti $0,01$ mm.

Posmatrajmo tanki providni list s paralelnim graničnim površinama, kao na slici 2.50. Neka dvije paralelne svjetlosne zrake padaju pod uglom α na tanku planparalelnu ploču debljine d i indeksa prelamanja n. Pri nailasku svjetlosti na graničnu površinu, dolazi i do prelamanja i do odbijanja. Neka se zraka (1) prelomi na graničnoj površini pod uglom β, dođe do druge granične površine, odbije se, te izađe iz ploče kao zraka $(1')$. Ona se superponira sa zrakom $(2')$, koja je nastala odbijanjem zrake (2) od gornju površinu. Dok zraka (2) pređe put $\overline{DB}$, za to vrijeme zraka (1) pređe put $\overline{AC} + \overline{CB}$. To znači da između zrake $(1')$ i $(2')$ postoji optička putna razlika (s obzirom da se kreću u različitim sredinama)

$$\Delta = n\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) - \overline{DB}. \tag{2.106}$$

Iz trougla $\triangle ABD$ se vidi da je

$$\overline{DB} = \overline{AB}\sin\alpha = 2b\mathrm{tg}\beta\sin\alpha. \tag{2.107}$$

Trouglovi $\triangle ACE$ i $\triangle BCE$ su jednaki, te je i $\overline{AC} = \overline{BC}$, tako da je

$$\overline{AC} + \overline{CB} = 2\frac{b}{\cos\beta}. \tag{2.108}$$

Optička putna razlika se sada može napisati kao:

$$\Delta = n\frac{2b}{\cos\beta} - 2b\mathrm{tg}\beta\sin\alpha, \tag{2.109}$$

Slika 2.50. *Do interferencije na tankim providnim listićima dolazi usljed putne razlike između talasa koji se odbijaju od gornju i donju površinu lisitća.*

što nakon primjene zakona prelamanja na zraku (1) tj. $\sin\alpha = n\sin\beta$ i osnovne jednačine trigonometrije daje

$$\Delta = 2bn\cos\beta. \tag{2.110}$$

Primjenjujući opet osnovnu jednačinu trigonometrije i pomenuti zakon prelamanja, slijedi da je:

$$n\cos\beta = n\sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{n^2-(n\sin\beta)^2} = \sqrt{n^2-\sin^2\alpha}. \tag{2.111}$$

te nakon uvrštavanja u jednačinu 2.110, optička putna razlika postaje

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}. \tag{2.112}$$

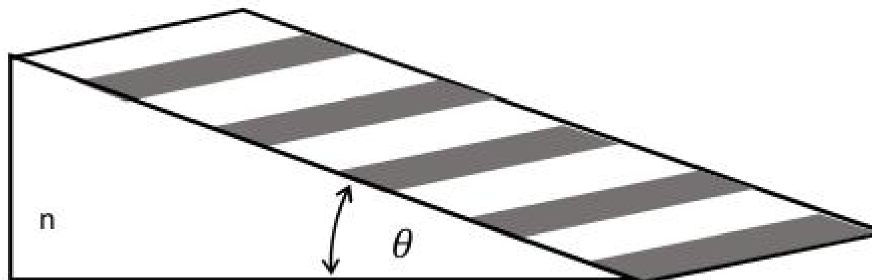
Međutim, pored optičke putne razlike, potrebno je uzeti u obzir da se zraka (2) u tački B odbija od gušću sredinu usljed čega mijenja fazu za π. To se mora uzeti u obzir tako što se optička putna razlika poveća ili umanji za polovinu talasne dužine svjetlosti. Konačna optička putna razlika postaje

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}. \tag{2.113}$$

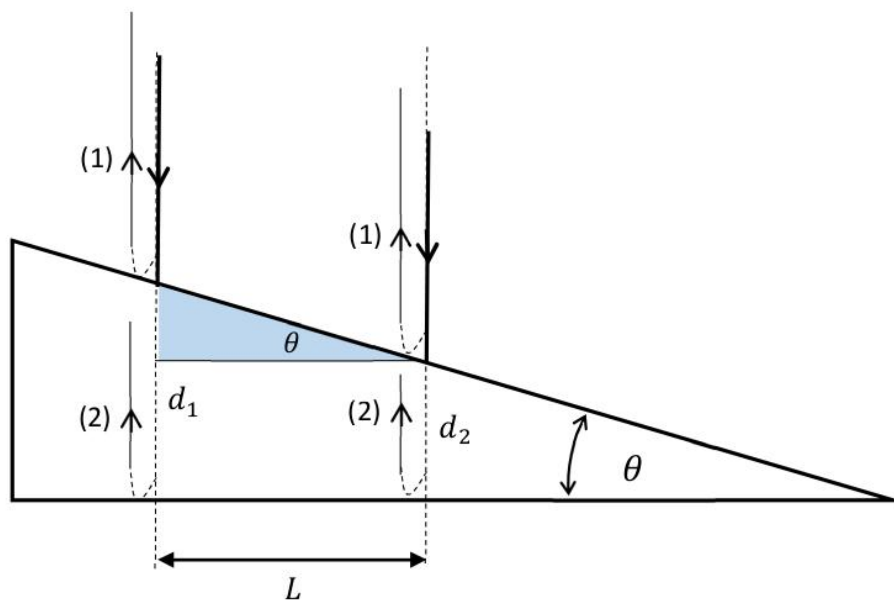
Sada se primjenom jednačina (2.97) i (2.98) mogu odrediti uslovi pod kojima će se formirati svijetle odnosno tamne pruge.

2.3.4 Interferencija na klinu

Do interferencije dolazi i pri odbijanju svjetlosti na tankim listovima promjenjive debljine - **klinovima** - prikazanim na slici 2.51a. Interferentne linije su međusobno paralelne i paralelne su bridu klina. Nazivaju se **interferentne pruge jednake debljine**, jer se javljaju na cijeloj širini klina na kojoj debljina ima istu vrijednost.



(a) *Listovi promjenjive debljine nazivaju se klinovi. Ugao θ je ugao pri vrhu klina, a n indeks prelamanja materijala od kojeg je napravljen.*



(b) *Zrake koje padaju na površinu klina djelimično se odbijaju od gornju površinu, a djelimično od donju, pri čemu te odbijene zrake međusobno interferiraju, stvarajući interferentne pruge. One se javljaju na cijeloj širini klina, na kojoj debljina ima istu vrijednost, te se nazivaju pruge jednake debljine. Udaljenost između pruga na različitim debljinama označena je s L i ona zavisi od ugla klina θ.*

Slika 2.51. Interferencija na tankim listićima.

Za objašnjenje ove pojave posmatrat ćemo zraku koja pada okomito na donju površinu klina i to na dva različita mjesta na klinu (slika 2.51b). Neka je njegova debljina na tim mjestima d_1 i d_2. Na gornjoj površini zraka se djelimično odbije (zraka (1)) i djelimično prelomi. Prelomljeni dio zrake se odbija od donju površinu klina (zraka (2)), te pri izlasku iz klina interferira sa zrakom (1). Putna razlika između ovih zraka je prema jednačini (2.113), za upadni ugao $\alpha = 0$ i prema uslovima konstruktivne i destruktivne interferencije (2.97) i (2.98)

$$\Delta_1 = 2nd_1 - \frac{\lambda}{2} = z\lambda, \quad z = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3..., \tag{2.114}$$

odnosno

$$\Delta_2 = 2nd_2 - \frac{\lambda}{2} = (2z+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2.115}$$

Rastojanje između pruga, na osnovu osjenčenog trougla na slici 2.51, je

$$L = \frac{d_2 - d_1}{\mathrm{tg}\theta} \approx \frac{d_2 - d_1}{\theta}. \tag{2.116}$$

Ova pojava se najčešće koristi za precizno određivanje malih uglova. Iz razlike $\Delta_2 - \Delta_1$ i iz jednačine (2.116), poznavajući vrijednost talasne dužine korištene svjetlosti λ i indeksa prelamanja n, može se odrediti ugao θ kao

$$L = \frac{\lambda}{2n\theta}. \tag{2.117}$$

2.3.5 Njutnovi prstenovi

Njutnovi prstenovi predstavljaju primjer pruga jednake debljine. Kad se na planparalelnu ploču postavi plankonveksno sočivo kao na slici 2.52, između ploče i sočiva se stvara vazdušni klin. Mjesta jednakih debljina vazdušnog sloja su kružnice poluprečnika r, a centar im se nalazi na zajedničkoj normali sočiva i ploče. Interferentne pruge, koje se formiraju kad na sočivo pada snop monohromatske svjetlosti, imat će oblik svijetlih i tamnih kružnica koje nazivamo **Njutnovi prstenovi**. Poluprečnike im možemo odrediti pomoću uslova konstruktivne i destruktivne interferencije koji se sad mogu predstaviti jednom jednačinom:

$$\Delta = z\frac{\lambda}{2}, \tag{2.118}$$

s tim da parnim vrijednostima broja z odgovaraju svijetli prstenovi, a neparnim vrijednostima tamni prstenovi. U tu svrhu, posmatrajmo svjetlosne zrake talasne dužine λ, koje padaju na ravnu stranu sočiva. Doći će do interferencije zraka reflektovanih od gornju površinu vazdušnog klina i od gornju površinu planparalelne ploče. Optička putna razlika tih zraka je

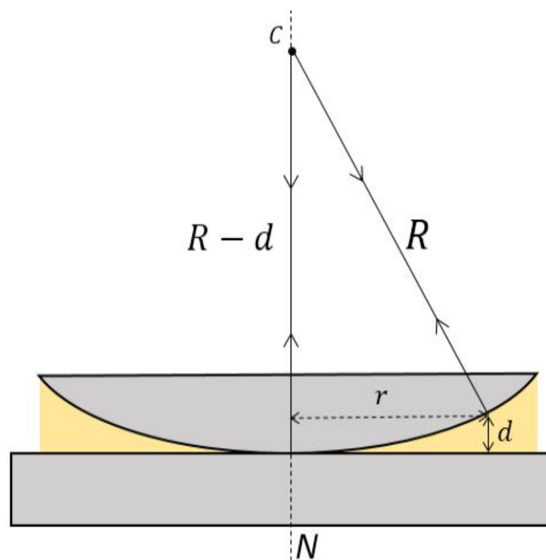
$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}. \tag{2.119}$$

Sa slike 2.52 se vidi da je

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2 = R^2 - 2Rd + r^2, \tag{2.120}$$

odnosno

$$d = \frac{r^2}{2R}, \tag{2.121}$$



Slika 2.52. *Do interferencije svjetlosti dolazi kad se na planparalelnu ploču postavi plankonveksno sočivo, jer se između njih formira vazdušni sloj u vidu klina. Interferentne pruge imaju oblik koncentričnih kružnica poluprečnika r, čiji se centar nalazi na normali N.*

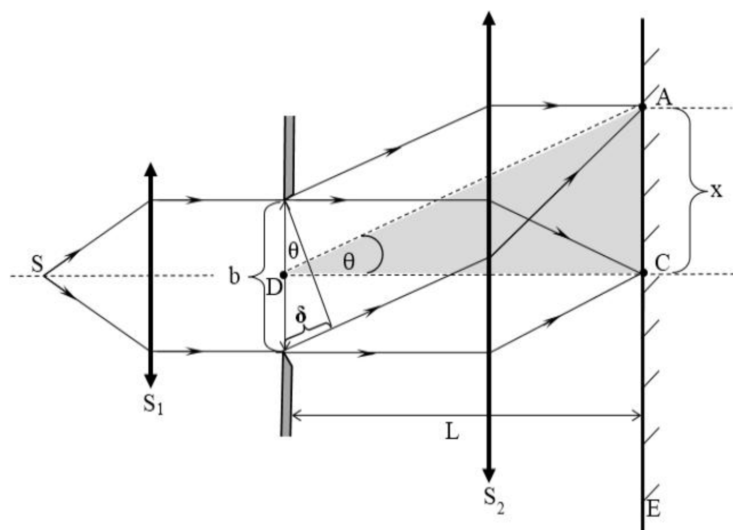
pri čemu je član d^2 zanemaren zbog male vrijednosti debljine vazdušnog klina. Uvrštavajući jednačine (2.118) i (2.121) u (2.119), dobija se poluprečnik Njutnovih prstenova:

$$r = \sqrt{(z-1)R\frac{\lambda}{2}}, \tag{2.122}$$

pri čemu se za svijetle prstenove uzimaju parne vrijednosti za z, a za tamne neparne vrijednosti.

2.3.6 Difrakcija svjetlosti

Jedna od osnovnih aproksimacija geometrijske optike je ta da se svjetlost prostire pravolinijski usljed čega se stvaraju sjene predmeta ili konture raznih otvora. Međutim, ukoliko je otvor ili pukotina, kroz koju prolazi svjetlost, reda veličine talasne dužine te svjetlosti, doći će do odstupanja od pravolinijskog prostiranja. Ta pojava naziva se **difrakcija svjetlosti** i može se objasniti **Hajgens-Frenelovim principom** (holandski naučnik Christiaan Huygens) koji glasi:
Svaka tačka talasne fronte je izvor novih sekundarnih talasa koji interferiraju. Poznavajući amplitude i faze sekundarnih talasa, može se naći amplituda rezultujućeg talasa u bilo kojoj tački prostora.
Ako je pukotina mnogo šira od talasne dužine svjetlosti koja na nju pada, onda nastaju paralelne talasne fronte, ograničene paralelnim zrakama, te se na zaklonu (ekranu) dobija geometrijska slika pukotine. Ukoliko je pukotina reda veličine talasne dužine svjetlosti, svjetlosne zrake se savijaju iza pukotine, tj. dolazi do difrakcije. U zavisnosti od položaja izvora svjetlosti i zaklona razlikujemo dva tipa difrakcije **Fraunhoferova** (njemački fizičar Joseph von Fraunhofer) i



Slika 2.53. *Fraunhoferova difrakcija na jednoj pukotini. Svjetlost iz izvora S nakon prolaska kroz prvo sočivo S_1 postaje paralelna, te pada na pukotinu. Nakon prolaska kroz pukotinu, sve zrake se pomoću sabirnog sočiva S_2 usmjeravaju na ekran. Na ekranu se zbog efekta interferencije stvara slika interferentnih pruga.*

Frenelova difrakcija. Ovdje ćemo razmotriti difrakciju s ravnim talasima tj. Fraunhoferovu difrakciju, na jednoj pukotini i na optičkoj mrežici.

Difrakcija na jednoj pukotini

Da bi došlo do difrakcije svjetlosti na pukotini, ona mora biti monohromatska, a snop mora biti paralelan. Paralelan snop dobijamo pomoću sabirnog sočiva tako što izvor svjetlosti postavimo u žižu tog sočiva, jer se u tom slučaju nakon prelamanja na sočivu zrake prostiru paralelno s optičkom osom. Šema difrakcije je prikazana na slici 2.53. Nakon prolaska svjetlosti kroz pukotinu dolazi do skretanja svjetlosnih zraka koje, pomoću drugog sabirnog sočiva, fokusiramo na ekran E koji se nalazi na rastojanju L od pukotine.

Posmatrajmo samo one sekundarne svjetlosne zrake koje se nakon prolaska kroz pukotinu difraktuju pod istim uglom θ u odnosu na normalu i zrake koje ne difraktuju pri prolasku kroz pukotinu. Poznato je da će sve paralelne zrake, nakon prolaska kroz sabirno sočivo, pasti u istu tačku. S obzirom da se svjetlosne zrake sada posmatraju kao talasi, doći će do njihove interferencije, te će se na određenom mjestu na ekranu pojaviti tamne ili svijetle pruge. Zrake, koje ne difraktuju pri prolasku kroz pukotinu, nakon interferencije (u tački C) će dati svijetlu prugu na ekranu, koja se naziva *centralna svijetla pruga*. Zrake, koje difraktuju, te dolaze u tačku A, nakon interferencije daju svijetlu ili tamnu prugu.

Na difrakcionoj slici uočavamo različit intenzitet svijetlih pruga. Zavisnost intenziteta osvijetljenosti od ugla difrakcije može se dobiti poznavanjem jedna-

čine rezultujućeg talasa u nekoj tački na zaklonu koja glasi

$$\psi = A\cos(\omega t), \tag{2.123}$$

gdje je A amplituda tog talasa i data je relacijom

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}. \tag{2.124}$$

S obzirom da je intenzitet talasa proporcionalan kvadratu amplitude talasa, intenzitet talasa u proizvoljnoj tački može se napisati kao

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)^2}, \tag{2.125}$$

gdje je I_0 maksimalni mogući intenzitet svjetlosti. Analizirajući dobijenu relaciju zaključujemo sljedeće:
1) ako je θ mali ugao (sinus ugla približno je jednak tom uglu) intenzitet je maksimalan

$$I = I_0 \left(\frac{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}\right)^2 = I_0, \tag{2.126}$$

što predstavlja **intenzitet centralne svijetle pruge** koju stvaraju zrake koje se lome pod veoma malim uglovima;

2) na mjestima za koja vrijedi da je $I = 0$ formiraju se **tamne pruge**. To će se desiti u slučaju kad je:

$$\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) = 0,$$

$$\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} = \pm z\pi, \quad z = 1, 2, 3, ...,$$

$$\sin\theta = \pm\frac{z\lambda}{b}; \tag{2.127}$$

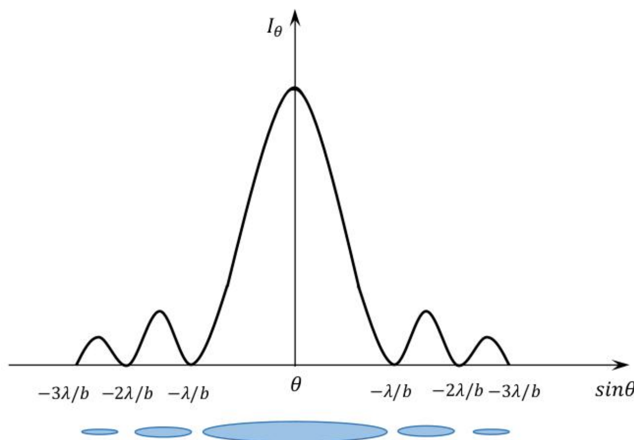
3) svijetle pruge će se javiti ukoliko je

$$\sin\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) = \pm 1,$$

$$\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} = \pm(2z+1)\frac{\pi}{2}, \quad z = 1, 2, 3, ...,$$

$$\sin\theta = \pm(2z+1)\frac{\lambda}{2b}. \tag{2.128}$$

Grafički prikaz intenziteta svjetlosti u zavisnosti od sinusa ugla skretanja ($\sin\theta$) predstavlja **krivu intenziteta** (slika 2.54). Ona se u potpunosti slaže s eksperimentalno dobijenim vrijednostima. Najveći intenzitet svjetlosti je u tački C, što je razumljivo, jer u tom direktnom pravcu nema međusobnog slabljenja svjetlosti usljed putne razlike. To se naziva *glavni maksimum*. Lijevo i desno od



Slika 2.54. *Zavisnost intenziteta svjetlosti na ekranu od sinusa ugla skretanja ($\sin\theta$) nakon Fraunhoferove difrakcije na jednoj pukotini, tzv. kriva intenziteta.*

te tačke javljaju se maksimumi 1-og, 2-og, 3-eg,... reda. Ti maksimumi postepeno opadaju, te odnos intenziteta pojedinih maksimuma i glavnog maksimuma iznosi:

$$I_1 = 0,0472I_0, \quad I_2 = 0,0168I_0, \quad I_3 = 0,0083I_0... \tag{2.129}$$

Sa slike 2.53 se vidi da je putna razlika δ između dva svjetlosna talasa $\delta = b\sin\theta$, te onda uslove za tamne i svijetle pruge (2.127) i (2.128) možemo napisati kao:

$$\delta = b\sin\theta = \pm z\lambda, \tag{2.130}$$

$$\delta = b\sin\theta = \pm(2z+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2.131}$$

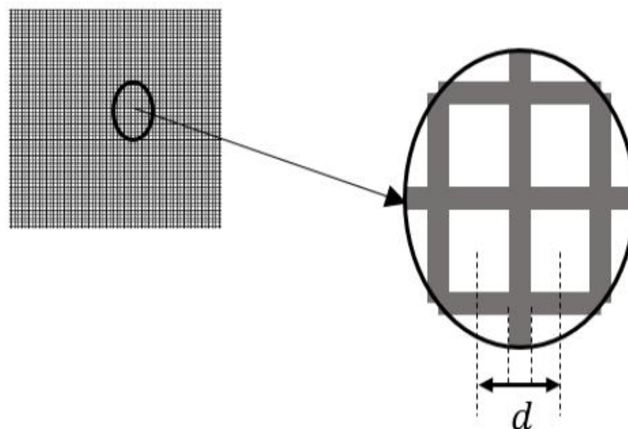
Udaljenost pojedine pruge od centralne svijetle pruge (x) se može dobiti iz trougla $\triangle ACD$ na slici 2.53 u kojem je $\mathrm{tg}\theta = x/L \approx \sin\theta$ pa je putna razlika

$$\delta = b\frac{x}{L}, \tag{2.132}$$

te uvrštavanjem odgovarajućih uslova za putnu razliku dobijamo udaljenost tamne ili svijetle pruge od centralne koju možemo iskoristiti za određivanje širine pukotine.

Ukoliko se umjesto pravougaonih otvora (pukotina) koriste kružni, također će doći do difrakcije, te će se na zaklonu javiti svijetli krug oivičen svijetlim i tamnim prstenovima. Dakle, centralna svijetla pruga bit će centralni (glavni) krug, a intenziteti ostalih svijetlih prstenova će biti sve slabiji kako se ide dalje od centra glavnog kruga. Odnosi intenziteta su drugačiji nego kod pravouglog otvora, a i proizvoljni broj z, da bi zadovoljio uslove tamnih i svijetlih pruga (2.127) i (2.128), ima drugačije vrijednosti, na primjer za prvi minimum je $z = 1{,}22$, te je uslov za formiranje prve tamne pruge (minimuma)

$$\sin\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} \tag{2.133}$$



Slika 2.55. *Optička rešetka se sastoji od velikog broja pukotina (proreza) poredanih paralelno jedna pored druge na jednakim rastojanjima. Udaljenost od centra jedne pukotine do centra druge pukotine je konstanta rešetke d.*

gdje je D prečnik kružnog otvora. Na osnovu ovoga se određuje moć razlaganja mikroskopa.

Difrakcija na optičkoj mrežici

Optička mrežica (optička rešetka) je staklena ploča na kojoj je urezan veliki broj uskih zareza (pukotina) poredanih paralelno na malim i jednakim rastojanjima. Rastojanje između sredina dvije pukotine naziva se konstanta optičke rešetke (slika 2.55) i računa se po formuli

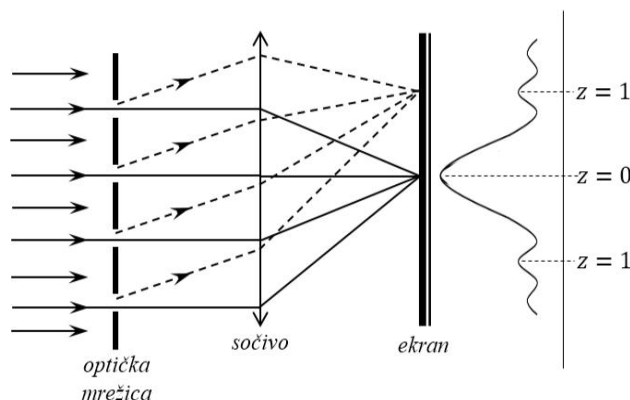
$$d = \frac{1\,\mathrm{mm}}{N} \tag{2.134}$$

gdje je N broj zareza na jednom milimetru.

Ako na rešetku pada paralelan snop monohromatske svjetlosti, dolazi do difrakcije na svakom zarezu (slika 2.56). Difraktovane zrake se fokusiraju pomoću sabirnog sočiva na ekran. Nakon prolaska kroz sočivo zrake interferiraju usljed putne razlike, te se na zaklonu opet dobije difrakciona slika u vidu svijetlih i tamnih pruga. Zrake koje padaju okomito na rešetku, interferencijom daju centralnu svijetlu prugu. Ostale svijetle pruge su maksimumi 1-og, 2-og,... reda, odnosno tamne pruge su minimumi 1-og, 2-og,... reda.

Ono što se zapravo dešava je to da sekundarni talasi, koji polaze iz različitih zareza, međusobno interferiraju. Što je veći broj zareza, na istom međusobnom rastojanju, efekti postaju sve složeniji. Pri tome efekti difrakcije koji potiču od pojedinačnih zareza postaju sve manje izraženi, a počinju da preovaladavaju skupni efekti, koji se svode na interferenciju zraka iz različitih zareza. Tačna matematička analiza ovakvih pojava je složena, međutim kod velikog broja zareza, kao što je slučaj kod rešetke, skupni efekt se može jednostavno predstaviti pomoću uslova interferencije.

Putna razlika talasa koji prolaze uz rubove susjednih pukotina, analogna je difrakciji na rubovima jedne pukotine te iznosi $\Delta = d \sin\theta$. Da bi se zrake



Slika 2.56. *Difrakcija svjetlosti na optičkoj rešetki. Slika interferencije se dobija na ekranu. Grafik na desnoj strani pokazuje zavisnost intenziteta svijetlih pruga od udaljenosti od centralne svijetle pruge. Red maksimuma je određen brojem z.*

koje idu pod uglom θ maksimalno pojačavale putna razlika mora biti jednaka cjelobrojnom umnošku talasnih dužina:

$$\delta = d \sin\theta = \pm z\lambda, \quad z = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.135}$$

Ukoliko se za difrakciju upotrebljava bijela svjetlost, onda će centralni maksimum biti bijele boje, a maksimumi viših redova se razlažu u spektar.

Difrakcija rendgenskih zraka

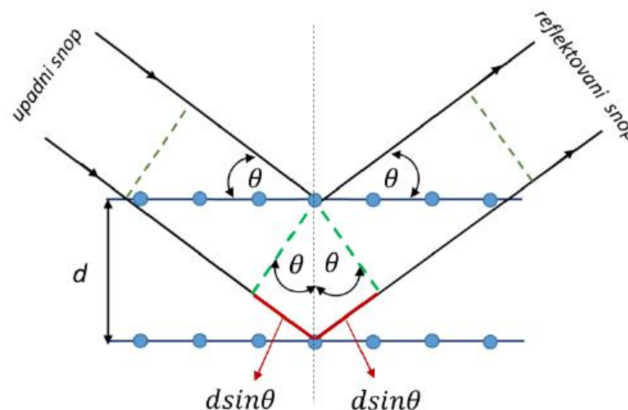
Rendgeno-strukturna analiza je primjena difrakcije u kristalografiji pri određivanju strukture kristala i rastojanja atoma/jona u rešetki − *rendgeno-strukturna analiza.* Pri tome se umjesto vidljive svjetlosti koriste rendgenske ili X-zrake. To su elektromagnetni talasi, čije talasne dužine padaju u interval od 0,001nm do 10nm. Kristalna rešetka ima ulogu optičke mrežice, s tom razlikom što se efekti difrakcije posmatraju u reflektovnom snopu, a ne u propuštenom, kao što je slučaj kod prave optičke mrežice. Da bismo objasnili difrakciju rendgenskih zraka na kristalima zamislićemo da se svi atomi u kristalu nalaze na setovima paralelnih ravni koje su na međusobnoj udaljenosti d kao što je prikazano na slici 2.57.

Neka na kristalnu rešetku pada paralelan snop X-zraka kao na slici 2.57. Posmatrajmo samo dvije paralelne zrake tog snopa, koje se odbijaju od atome smještene jedan ispod drugog. Reflektovane zrake su također paralelne. Rezultat interferencije će zavisiti od putne razlike između ove dvije zrake. Sa slike 2.57 vidimo da je putna razlika

$$\delta = 2d \sin\theta \tag{2.136}$$

Uslov da se na određenom mjestu formira maksimum pomoću optičke mrežice je $\delta = \pm z\lambda$, što primjenom na kristalnu rešetku daje:

$$2d \sin\theta = \pm z\lambda, \quad z = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.137}$$



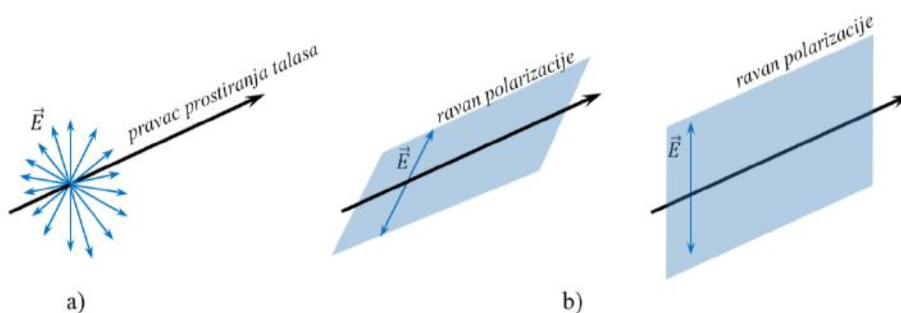
Slika 2.57. *Na kristalnu rešetku pada paralelan snop X-zraka, koji se odbijaju od atome smještene jedan ispod drugog. Zrake koje se odbijaju od donju ravan atoma prelaze za* $2d\sin\theta$ *duži put nego zrake koje se odbijaaju od gornju ravan. Ukoliko se ove zrake propuste kroz sabirno sočivo one će interferirati.*

Relacija (2.137) naziva se **Bragov uslov**, pri čemu je d rastojanje između susjednih kristalnih ravnina. Ugao θ je poznat pod nazivom Bragov ugao i predstavlja ugao između upadne rendgenske zrake i kristalnih ravnina za koji se kao rezultat konstruktivne interferencije pojavljuje maksimum intenziteta.

2.3.7 Polarizacija svjetlosti

Transverzalni mehanički talasi su talasi kod kojih čestice sredine osciluju u pravcu okomitom na pravac prostiranja talasa. To znači da čestice mogu oscilovati u bilo kojoj ravni okomitoj na pravac prostiranja talasa. To su nepolarizovani talasi (silka 2.58a). Ukoliko se na neki način postigne da čestice osciluju u samo jednoj ravni, nastaje polarizovan talas, a ravan određena linijom kretanja talasa i linijom oscilovanja naziva se ravan polarizacije (slika 2.58b). Ukoliko svjetlost posmatramo kao transverzali talas, kod kojeg su oscilacije čestica zamijenjene oscilacijama električnog i magnetnog polja, možemo na isti način razmatrati polarizaciju svjetlosti.

Svjetlost se sastoji od velikog broja elementarnih elektromagnetnih talasa koje pojedinačno emituju atomi kao električni oscilatori. Svaki talas koji emituje jedan atom je polarizovan, a orijentacija ravni polarizacije zavisi od orijentacije atoma u momentu emisije. S obzirom na veliki broj atoma, statistički gledano, orijentacije atoma će biti podjednako raspoređene u svim pravcima. To onda znači da se svjetlost sastoji od ogromnog broja elementarnih polarizovanih talasa čije su ravni polarizacije orijentisane u svim pravcima podjednako. Tek kad se različitim postupcima, ravni polarizacije orijentišu pretežno u jednom pravcu, onda makroskopski gledano, svjetlost dobija svojstva polarizovane svjetlosti. Dakle, svjetlost kod koje su ravni oscilacija električnog/magnetnog polja na nekin način uređeni, naziva se **polarizovana svjetlost**. Polarizacija može biti *eliptična, kružna i linearna.* Linearna polarizacija je najvažniji oblik polarizovane svjetlosti, a nastaje kad svjetlosni vektor ne vrši rotaciju već samo



Slika 2.58. *Primjer a) nepolarizovanog, b) polarizovanog talasa. Ravnine označene plavom bojom predstavljaju ravni polarizacije.*

mijenja intenzitet u jednom pravcu, tj. oscilacije električnog vektora se vrše samo u jednoj ravni. Ravan okomita na ravan oscilovanja, naziva se **ravan polarizacije**. Ljudsko oko ne može da osjeti razliku između polarizovane i nepolarizovane svjetlosti.

Zraka svjetlosti ima jednaka svojstva u svim pravcima okomitim na pravac prostiranja, te je zbog toga opravdano predstaviti svjetlosnu zraku samo jednom pravom linijom koja pokazuje pravac prostiranja. Međutim, pri propuštanju svjetlosti kroz jednu vrstu filtera koja se naziva *polarizator*, može se uočiti poprečna orijentacija svjetlosti. Naime, ako svjetlost propustimo kroz dva polarizatora, koja su međusobno paralelna, svjetlost prolazi kroz oba, međutim ako su oni zakrenuti pod pravim uglom, jedan u odnosu na drugi, svjetlost prolazi kroz jedan, ali ne i kroz drugi (vidi sliku 2.59). Drugi polarizator se naziva *analizator*.

Neka na polarizator pada linearno polarizovana svjetlost amplitude E_0 i intenziteta I_0. Ugao između ravni oscilovanja upadnog talasa i ravni polarizatora je φ (slika 2.60a). Polarizator će propustiti samo paralelnu komponentu vektora $\overrightarrow{E_0}$, tj. $\overrightarrow{E_1}$, čiji je intenzitet $E_1 = E_0 \cos\varphi$, a intenzitet

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \tag{2.138}$$

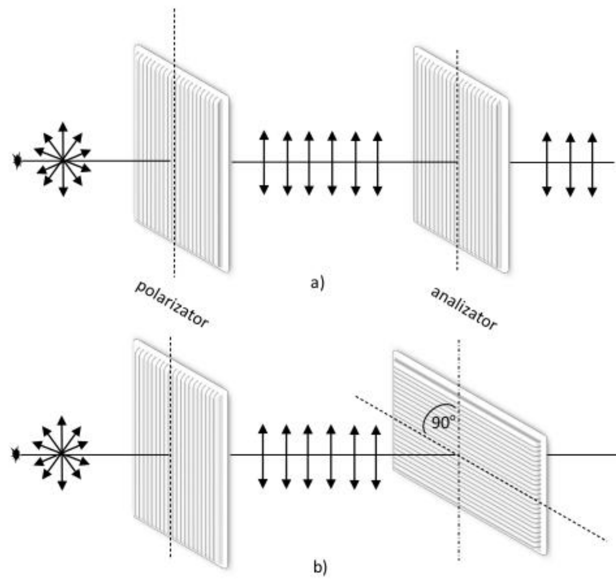
Ova jednačina se naziva **Malusov zakon** (francuski naučnik Etienne Louis Malus). Ukoliko se na put upadne zrake postave dva polarizatora pod uglom φ_0, iz prvog polarizatora će izaći linearno polarizirana svjetlost duplo slabijeg intenziteta. Prema Malusovom zakon iz drugog polarizatora će izaći svjetlost intenziteta

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi_0. \tag{2.139}$$

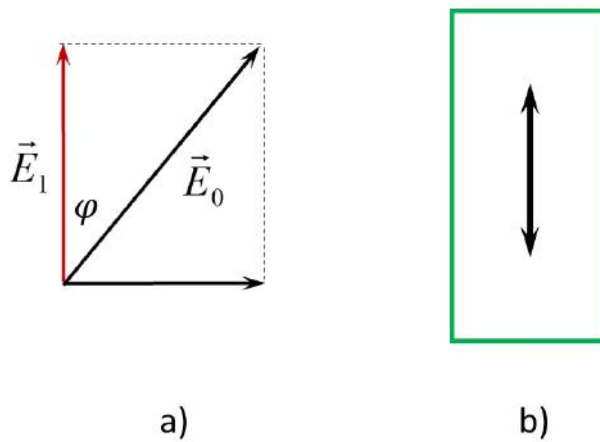
Jasno je da će maksimalni intenzitet biti za $\varphi_0 = 0°$ tj. kad su polarizatori paralelni, a ukoliko su okomiti ($\varphi_0 = 90°$), intenzitet je jednak nuli (svjetlost ne prolazi kroz drugi polarizator).

Polarizacija usljed prelamanja i odbijanja

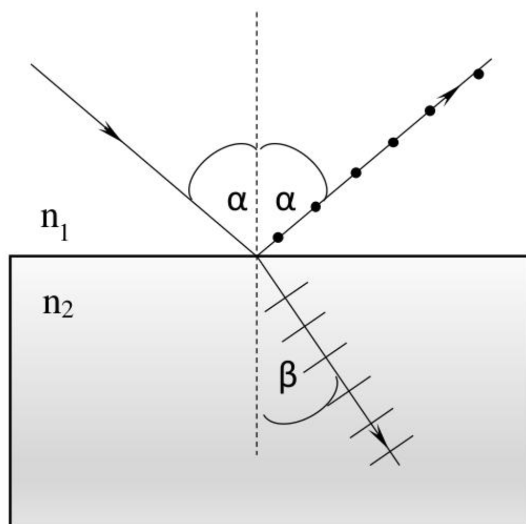
Kad svjetlosna zraka padne na uglačanu staklenu planparalelnu ploču kao na slici 2.61 djelimično će se odbiti, a djelimično prelomiti. I odbijena i prelomljena zraka su djelimično polarizirane, a njihove ravni polarizacije su međusobno



Slika 2.59. *Prolazak svjetlosti kroz polarizator i analizator u slučaju kad su im orijentacije a) paralelne, b) okomite.*



Slika 2.60. *a) Vektor električnog polja upadnog talasa razložen na komponente. b) Ravan polarizatora. Polarizator će propustiti samo komponentu* $\overrightarrow{E_1}$.



Slika 2.61. *Djelimična polarizacija svjetlosti nastaje kad svjetlost pada pod nekim uglom na staklenu planparalelnu ploču. Jedan dio zrake se odbije, a drugi prelomi, pri čemu su obje zrake djelimično polarizirane (amplituda oscilovanja električnog polja nije ista u svim ravninama) s okomitim ravnima polarizacije. Najbolja polarizacija se dobije kad odbijena i prelomljena zraka zaklapaju ugao od* 90°.

okomite. Stepen polarizacije zavisi od upadnog ugla, a najbolja polarizacija se dobije u slučaju kad su odbijena i prelomljena zraka okomite. U tom slučaju je $\alpha + \beta = 90°$. Za dio zrake koja se prelomila, iz zakona prelamanja svjetlosti, slijedi:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta,$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin(90° - \alpha),$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \cos\alpha,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{n_2}{n_1},$$

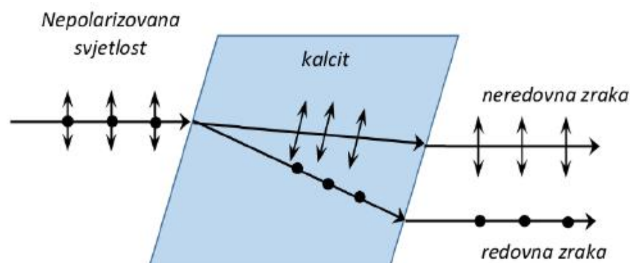
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.140}$$

Relacija (2.140) naziva se **Brusterov zakon** (škotski naučnik Sir David Brewster), a ugao α naziva se **Brusterov ugao**. Najpovoljniji upadni ugao za staklo i vazduh je $\approx 57°$.

Imajući u vidu da više od 90% svjetlosti prođe kroz planparalelnu ploču, proces polarizacije se može poboljšati postavljanjem više ploča, paralelno jednu ispod druge. Pri svakom prolasku kroz narednu ploču jedan dio zrake će se odbiti, a njena ravan polarizacije je identična prvoj odbijenoj zraci. Tako se postepeno uklanjaju komponente s okomitom ravni polarizacije, pri čemu se propuštena zraka približava linearno polarizovanoj zraci.

Ako se polarizovana svjetlost pusti da pada na pomenutu planparalelnu ploču pod Brusterovim uglom onda će ona potpuno proći kroz ploču ukoliko ravan polarizacije odgovara ravni propuštene zrake. To znači da se ovakva zraka neće odbijati od ploču.

Polarizacija usljed dvojnog prelamanja



Slika 2.62. *Dvojno prelamanje svjetlosne zrake na kristalu kalcita. Pri izlasku iz kristala regularna i neregularna zraka su djelimično polarizovane, s okomitim ravnima polarizacije.*

Do pojave dvojnog prelamanja svjetlosti dolazi pri prolasku svjetlosti kroz kristale kao što su islandski kalcit, kvarc i sl., koji pokazuju svojstvo anizotropije optičkih osobina. To su kristali koji imaju različita optička svojstva u različitim pravcima, tj. imaju različitu brzinu prostiranja u različitim pravcima. Svjetlosna zraka se, pri prolasku kroz takav kristal (slika 2.62), razlaže na dvije zrake od kojih jedna leži u istoj ravni s upadnom zrakom (tj. važi zakon prelamanja) i naziva se *redovna (obična) zraka*, dok se druga ne prelama u skladu sa zakonom prelamanja i naziva se *neredovna (neobična).* Obje zrake su polarizovane s okomitim ravnima polarizacije. Redovna zraka ima istu brzinu u svim pravcima, dok brzina neredovne zrake zavisi od pravca prostiranja. Osa duž koje obje zrake imaju istu brzinu naziva se optička osa kristala.

Poglavlje 3

Kvantna priroda svjetlosti

U našem svakodnevnom životu nema ništa misteriozno ni dvosmisleno kad govorimo o pojmovima čestice ili talasa. Klasična fizika koja oslikava realnost naših čula tretira čestice i talase kao nezavisne komponente te stvarnosti. Međutim, fizikalna stvarnost ima svoj korijen u mikroskopskom svijetu atoma i molekula, elektrona i atomskih jezgi gdje nema ni čestica ni talasa u onom smislu na koji smo navikli. Mi smatramo da su elektroni čestice jer imaju naboj i masu. Ipak, vidjećemo da je potpuno ispravno interpretirati elektron kao talas. Također, smatramo da je svjetlost elektromagnetni (EM) talas jer iskazuje svojstva difrakcije, interferencije i polarizacije. Posmatranjem svjetlosti kao talasa bilo je moguće opisati mnoge fizikalne fenomene. Kako je mjerna tehnika napredovala, krajem XIX i početkom XX vijeka, prikupljen je veoma veliki broj eksperimenata koji nisu mogli biti objašnjeni talasnom prirodom svjetlosti. Klasična fizika je npr. naišla na veliki problem u opisivanju zračenja apsolutno crnog tijela, fotoelektričnog ili Komptonovog efekta (Arthur Holly Compton, američki fizičar) uz pomoć pretpostavke da je svjetlost talas i da se energija emituje i apsorbuje kontinuirano. Ovo je trajalo sve dok njemački fizičar Maks Plank (Max Planck) u nastojanju da opiše zračenje apsolutno crnog tijela nije predložio da se energija emituje diskretno u vidu malih porcija ili kvanata energije koji su nazvani fotoni. To je bila ključna pretpostavka za razvoj moderne fizike koja uključuje opisivanje svih fenomena na nivou atoma pa ćemo u nastavku detaljnije objasniti zračenje apsolutno crnog tijela.

3.1 Toplotno zračenje

Sva tijela na temperaturama različitim od apsolutne nule emituju i apsorbuju toplotno zračenje. Pri tome, toplija tijela emituju više energije od hladnijih. Toplotno zračenje nastaje na račun unutrašnje energije tijela i eksperimentalno je dokazano da je toplotno zračenje ravnotežno zračenje, tj. da je energija koju tijelo emituje jednaka energiji koju tijelo apsorbuje za svaku talasnu dužinu. Sve druge vrste zračenja su neravnotežne. Da bismo kvantitativno opisali zakone toplotnog zračenja uvešćemo određene veličine koje se u njima pojavljuju.

Intenzitet zračenja (gustina energetskog fluksa ili integralna emisiona moć) E_T se definiše kao fluks energije $d\Phi$ koji emituje jedinična površina

tijela dS:

$$E_T = \frac{d\Phi}{dS} \ . \tag{3.1}$$

Zračenje se sastoji od različitih talasnih dužina (frekvencija), tako da ćemo zračenje iz intervala talasnih dužina $d\lambda$ ili iz intervala kružnih frekvencija $d\omega$ označiti sa $dE_{\lambda,T}$ i $dE_{\omega,T}$ respektivno. Indeks T znači da intenzitet zračenja zavisi od temperature što je eksperimentalno dokazano. Ukoliko se radi o malim intervalima talasnih dužina ili frekvencija tada vrijedi da je zračenje proporcionalno tim intervalima što možemo predstaviti kao:

$$dE_{\lambda,T} = e_{\lambda,T} d\lambda \tag{3.2}$$

i

$$dE_{\omega,T} = e_{\omega,T} d\omega. \tag{3.3}$$

U gornjim formulama veličina $e_{\lambda,T}$ ili $e_{\omega,T}$ zove se ***spektralna emisiona moć (sposobnost)***. Može se definisati kao energija koja se emituje sa jedinice površine tijela u jedinici vremena u jedinični interval talasnih dužina:

$$e_{\lambda,T} = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t \Delta \lambda} \ , \tag{3.4}$$

gdje je ΔW energija koju tijelo emituje sa površine ΔS za vrijeme Δt po intervalu talasnih dužina $\Delta\lambda$. Integralna emisiona moć se može izračunati kao

$$E_T = \int_0^\infty e_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^\infty e_{\omega,T} d\omega. \tag{3.5}$$

Mora biti ispunjen uslov da je

$$dE_{\lambda,T} = dE_{\omega,T} \tag{3.6}$$

odnosno

$$e_{\lambda,T} d\lambda = e_{\omega,T} d\omega. \tag{3.7}$$

Odavde možemo naći vezu između $e_{\lambda,T}$ i $e_{\omega,T}$. Znamo da je kružna frekvencija povezana sa talasnom dužinom kao:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \tag{3.8}$$

Ako jednačinu (3.8) deriviramo dobijamo da je:

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega. \tag{3.9}$$

Predznak "-" u jednačini (3.9) nema fizikalno značenje već samo pokazuje da kad λ raste ω se smanjuje, te ga u nastavku nećemo pisati. Koristeći relacije (3.7) i (3.9) dobijamo

$$e_{\omega,T} d\omega = e_{\lambda,T} d\lambda = e_{\lambda,T} \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega. \tag{3.10}$$

Odavde slijedi da je

$$e_{\omega,T} = e_{\lambda,T} \frac{2\pi c}{\omega^2}. \tag{3.11}$$

3.2 Kirhofov zakon zračenja

U uslovima toplotne ravnoteže između tijela i okoline, zračenje koje padne na tijelo se može reflektovati, asporbovati ili transmitovati u zavisnosti od osobina tijela. Prema zakonu o održanju energije ukupna energija E će biti jednaka

$$E = E_a + E_r + E_t, \tag{3.12}$$

gdje su E_a, E_r i E_t apsorbovana, reflektovana i transmitovana energija respektivno. Ako relaciju (3.12) podijelimo sa E dobićemo da je

$$\frac{E_a}{E} + \frac{E_r}{E} + \frac{E_t}{E} = 1 \tag{3.13}$$

ili

$$a + r + t = 1, \tag{3.14}$$

gdje su a, r i t koeficijenti apsorpcije, refleksije i transmisije respektivno. Ukoliko apsorpciju vežemo samo uz apsorpciju energetskog fluksa iz određenog dijela frekvencija ω onda možemo definisati *spektralnu asporpcionu moć (koeficijent apsorpcije)* kao

$$a_{\omega,T} = \frac{\Phi_\omega^{'}}{\Phi_\omega}, \tag{3.15}$$

gdje je $\Phi_\omega^{'}$ apsorbovani dio fluksa iz dijela spektra ω, a Φ_ω je ukupni upadni dio fluksa iz istog dijela spektra. I spektralna apsorpciona moć kao i emisiona moć je funkcija frekvencije i temperature. Njemački fizičar Gustaf Robert Kirhof (Gustav Robert Kirchhoff) je utvrdio da postoji veza između emisione i asporpcione moći. Pokazao je da je odnos između emisione i apsorpcione spektralne moći na temperaturi T za određenu frekvenciju ω jednak za sva tijela i univerzalna je funkcija talasne dužine i temperature:

$$\frac{e_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega, T)\,. \tag{3.16}$$

Ovaj zakon je poznat kao **Kirhofov zakon zračenja**, a funkcija $f(\omega, T)$ je *univerzalna Kirhofova funkcija.* Prema ovom zakonu odnos emisione i apsorpcione moći za svako tijelo ne zavisi od prirode tijela. Iako se koeficijenti emisije i asporpcije veoma razlikuju od tijela do tijela, njihov količnik je uvijek isti za sva tijela. Zaključujemo da što više energije tijelo apsorbuje, više će energije i emitovati.

Tijelo koje asporbuje svo zračenje koje na njega padne zove se **apsolutno crno tijelo** (ACT) tj. njegov koeficijent apsorpcije je jednak jedinici, $a_{\lambda,T_{(ACT)}}=1$. Iz (3.16) onda proizilazi da je Kirhofova funkcija ustvari jednaka spektralnoj emisionoj moći ACT tj.

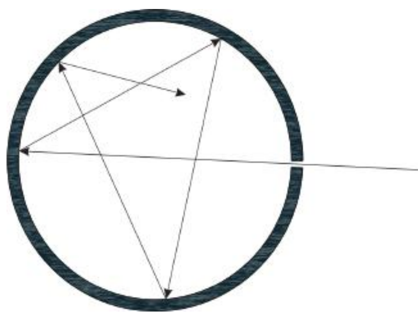
$$e_{\omega,T_{(ACT)}} = f(\omega, T)\,. \tag{3.17}$$

Za sva druga tijela vrijedi da je $a_{\lambda,T}<1$ i za takva tijela kažemo da su **siva tijela**. Pored funkcije $f(\omega, T)$ koja zavisi od kružne frekvencije i češće se koristi u teorijskim radovima, postoji i funkcija spektralne raspodjele $\phi(\lambda, T)$ koja zavisi

od talasne dužine i koja je pogodnija u eksperimentalnim istraživanjima. Po analogiji sa (3.11) možemo naći vezu između ove dvije funkcije

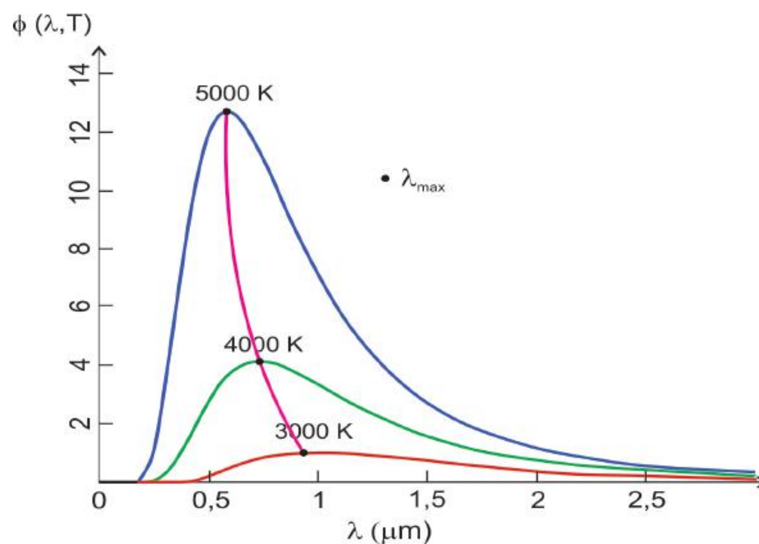
$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2}\phi\left(\frac{2\pi c}{\omega}, T\right). \tag{3.18}$$

ACT je idealni apsorber koji istovremeno reemituje energiju u prostor oko sebe. Takvo tijelo u prirodi ne postoji. Zato se za proučavanje ACT uzima model koji predstavlja šuplju sferu sa malom rupom kroz koju upada zračenje koje se nakon višestrukih refleksija apsorbuje u unutrašnjosti što je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1. *Model apsolutno crnog tijela.*

Proučavajući spektar ovakvog modela ACT uz pomoć spektralnog aparata, došlo se do podataka o izgledu intenziteta zračenja što je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2. *Spektar zračenja apsolutno crnog tijela.*

Sa slike se mogu primijetiti dvije eksperimentalne činjenice. S porastom temperature:

1. povećava se intenzitet zračenja i
2. maksimum zračenja se pomijera ka manjim talasnim dužinama.

3.3 Stefan-Bolcmanov zakon

Slovenački fizičar Josef Stefan (Jožef Štefan) je 1897. godine nakon velikog broja eksperimenata zaključio da je integralna emisiona moć proporcionalna četvrtom stepenu temperature:

$$E_T \sim T^4. \tag{3.19}$$

Njemački fizičar Ludvig Bolcman (Ludvig Boltzman) je 1884. godine na osnovu termodinamičkih razmatranja došao do istog zaključka. Tako je nastao **Stefan-Boltzmanov zakon**:

$$E_T = \sigma T^4, \tag{3.20}$$

gdje je σ *Stefan-Boltzmanova konstanta* koja je eksperimentalno određena i iznosi σ=5,67·10^{-8} $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$. Ukupna snaga zračenja crnog tijela sa površine S može se onda izračunati kao:

$$P = S\sigma T^4. \tag{3.21}$$

Za realna (siva) tijela koristi se faktor emisije $e_{\lambda,T} < 1$, pa je

$$E_T = e_{\lambda,T}\sigma T^4. \tag{3.22}$$

Ukoliko bi bio poznat oblik funkcije $f(\omega, T)$, Stefan-Boltzmanov zakon bi bilo moguće dobiti iz relacije (3.5) jer za ACT vrijedi:

$$E_T = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega. \tag{3.23}$$

Svi pokušaji klasične fizike i elektrodinamike da se dobije tačan analitički oblik ove funkcije bili su neuspješni ili samo djelimično uspješni. Klasična fizika je bila nemoćna da objasni zračenje ACT i bilo je potrebno uvesti potpuno nove pretpostavke i ideje koje su otvorile novo poglavlje u razvoju fizike. Uspješan teorijski tretman zračenja ACT omogućio je razvoj atomske i kvantne fizike. Sad ćemo razmotriti pokušaje klasične fizike da objasni zakone zračenja ACT.

3.4 Vinov zakon

Njemački fizičar Vilhelm Vin (Wilhelm Wien) je 1893. godine dao oblik funkcije $f(\omega, T)$ koristeći zakone termodinamike i elektromagnetizma :

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{3.24}$$

gdje je $F\left(\frac{\omega}{T}\right)$ neka nepoznata funkcija koja zavisi samo od omjera ω i T. Iz nje se mogao naslutiti oblik Stefan-Bolcmanovog zakona korištenjem relacije (3.23):

$$E_T = \int_0^\infty \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega. \tag{3.25}$$

Uvođenjem smjene $\frac{\omega}{T} = x$; $d\omega = Tdx$ dobijamo:

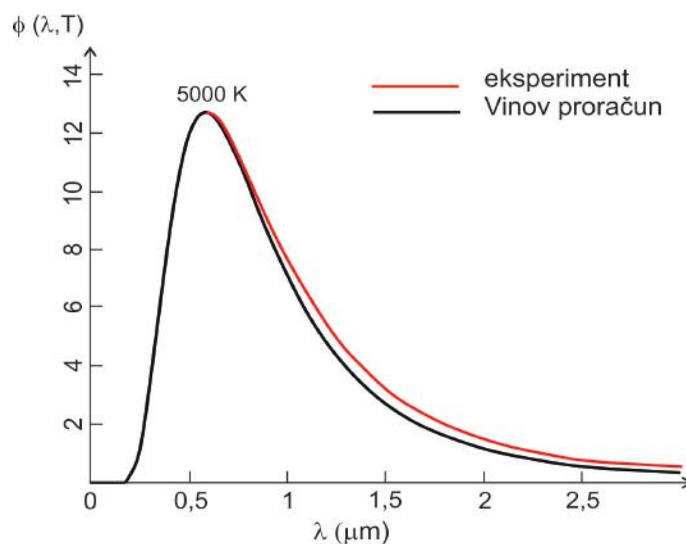
$$E_T = \int_0^\infty T^3 x^3 F(x) T dx = T^4 \int_0^\infty x^3 F(x) dx = \sigma T^4, \tag{3.26}$$

gdje smo određeni integral u gornjem izrazu označili sa σ. Vidimo da smo dobili oblik Stefan-Bolcmanovog zakona. Poznavanje funkcije $F(x)$ omogućilo bi nam da izračunamo određeni integral $\int_0^\infty x^3 F(x) dx$ iz gornje relacije što bi trebalo dati vrijednost Stefan-Bolcmanove konstante σ.

Iako Vinova funkcija nije bila potpuna, omogućila je da se potvrdi i druga eksperimentalna činjenica tj. da se maksimum funkcije $\phi(\lambda, T)$ pomjera ka manjim talasnim dužinama sa porastom temperature što ćemo pokazati u nastavku. Koristeći relacije (3.18) i (3.24) dobijamo da je:

$$\phi(\lambda, T) = \frac{\omega^2}{2\pi c} f(\omega, T) = \frac{\omega^5}{2\pi c} F\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5} F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{C}{\lambda^5} \Psi(\lambda T), \tag{3.27}$$

gdje smo sa C označili sve konstante koje se pojavljuju u gornjem izrazu i uveli smo neku novu nepoznatu funkciju Ψ koja zavisi samo od proizvoda λ i T.



Slika 3.3. *Poređenje eksperimentalnih rezultata i Vinove funkcije.*

Funkcija Ψ se nije mogla odrediti samo iz termodinamičkih razmatranja, te je Vin kasnije uspio dobiti oblik ove funkcije uz pomoć nekih pretpostavki o samom mehanizmu nastanka zračenja:

$$\Psi(\lambda T) = e^{-\frac{C_1}{\lambda T}} \tag{3.28}$$

gdje je C_1 neka konstanta. Talasna dužina λ_m pri kojoj funkcija $\phi(\lambda, T)$ dostiže svoj maksimum dobija se iz uslova:

$$\left[\frac{d\phi(\lambda, T)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_m} = 0. \tag{3.29}$$

Deriviranjem jednačine (3.27) po λ i korištenjem (3.28) dobijamo:

$$\frac{d\phi(\lambda,T)}{d\lambda} = C\left(-\frac{5e^{-\frac{C_1}{\lambda T}}}{\lambda^6} + \frac{e^{-\frac{C_1}{\lambda T}}}{\lambda^5}\frac{C_1}{\lambda^2 T}\right) = -\frac{Ce^{-\frac{C_1}{\lambda T}}}{\lambda^6}\left(5 - \frac{C_1}{\lambda T}\right). \tag{3.30}$$

Kad gornji izraz izjednačimo s nulom za $\lambda = \lambda_m$, slijedi

$$5 - \frac{C_1}{\lambda_m T} = 0. \tag{3.31}$$

Ova relacija je ispunjena samo ako je proizvod $\lambda_m T$ jednak nekoj konstanti koju smo označili sa b tj. ako vrijedi:

$$\lambda_m T = b. \tag{3.32}$$

Navedeni zakon poznat je pod nazivom **Vinov zakon**, a konstanta b je *Vinova konstanta* koja je određena eksperimentalno i iznosi b=2,9·10^{-3} mK. Vinov zakon pokazuje da se pri porastu temperature na kojoj tijelo zrači, maksimum funkcije spektralne raspodjele pomijera ka manjim talasnim dužinama. Ovu pojavu možemo uočiti prilikom zagrijavanja gvožđa do crvenog usijanja. Kad ga dodatno zagrijemo na višu temperaturu počinje da emituje plavičastu svjetlost. Zvijezde zrače kao crna tijela pa njihova boja zavisi od njihove temperature. Ukoliko poznajemo talasnu dužinu pri kojoj se dobija maksimum zračenja, iz Vinovog zakona možemo izračunati temperaturu zvijezde.

Poređenjem Vinove funkcije sa eksperimentalnim rezultatima (slika 3.3) možemo primijetiti dobro slaganje u području malih talasnih dužina, dok je za velike talasne dužine odstupanje od eksperimenta značajno.

3.5 Rejli-Džinsov zakon

U pokušaju da odrede oblik funkcije $f(\omega, T)$, britanski fizičari Lord Rejli (Reileigh) i Džejms Džins (James Jeans) su krenuli od teoreme klasične statističke fizike o raspodjeli energije prema stepenima slobode. Oni su pretpostavili da atomi crnog tijela predstavljaju klasične harmonijske oscilatore koji imaju naelektrisanje i mogu da razmjenjuju energiju sa okolinom putem EM polja. Kad se pobude, takvi oscilatori emituju kontinuiran spektar. U stanju termodinamičke ravnoteže na svaki EM oscilator otpada kT energije, gdje je k Boltzmanova konstanta. Pri tome $\frac{kT}{2}$ otpada na energiju električnog, a drugo $\frac{kT}{2}$ na energiju magnetnog polja. Uz ovu pretpostavku dobili su detaljan oblik funckije spektralne raspodjele zračenja:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \tag{3.33}$$

ili

$$\phi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT. \tag{3.34}$$

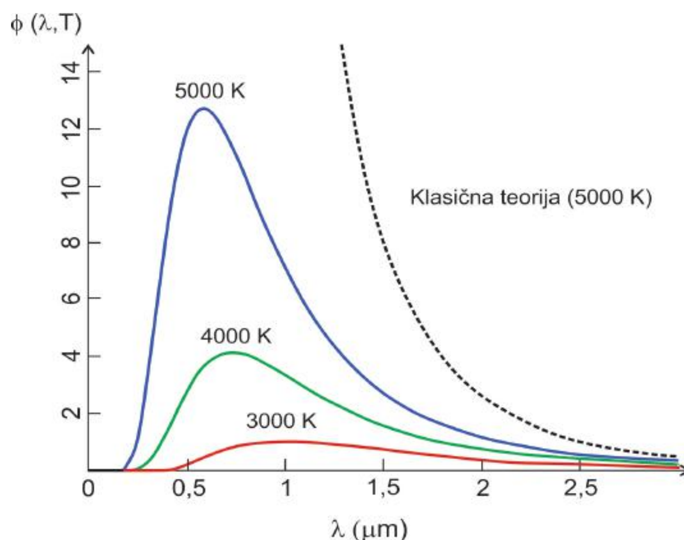
Ukoliko jednačinu (3.33) pomnožimo i podijelimo sa ω dobićemo oblik Vinovog zakona:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^3}{4\pi^2 c^2} k\frac{T}{\omega}. \tag{3.35}$$

Pošto imamo funkciju $f(\omega, T)$ možemo izračunati integralnu emisionu moć:

$$E_T = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT d\omega = \frac{kT}{4\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega = \infty. \tag{3.36}$$

Iako izvedena uz korektno korištenje zakona klasične fizike, integralna emisiona moć ACT je beskonačna. U fizici je ovaj rezultat poznat pod nazivom **ultraljubičasta katastrofa**. Na slici 3.4 prikazana je funkcija Rejli-Džinsa zajedno sa eksperimentalnim rezultatima. Možemo primijetiti da je njeno slaganje sa eksperimentom dobro u području velikih talasnih dužina (infracrveno područje) dok se u području malih talasnih dužina (ultraljubičasto područje) veoma razlikuje od eksperimenta. Iz ovog rezultata je bilo jasno da se teoretski model za opisivanje zračenja ACT mora zasnovati na nekim potpuno drugačijim pretpostavkama nego do tad.



Slika 3.4. *Prikaz eksperimentalnih rezultata (pune linije) i rezultata Rejli-Džinsa (isprekidana linija). Ovaj neuspijeh klasične teorije poznat je kao ultraljubičasta katastrofa.*

3.6 Plankov zakon zračenja crnog tijela

Plank je 1900. godine uspio dobiti funkciju $f(\omega, T)$ koja se u potpunosti slaže sa eksperimentalnim rezultatima. On je pretpostavio da atomi ACT emituju energiju u vidu malih odvojenih porcija tzv. **kvanata energije** koji su kasnije nazvani **fotonim**a. Za razliku od toga, klasična fizika je smatrala da atomi energiju emituju kontinuirano. Plank kaže da je energija jednog fotona proporcionalna frekvenciji ν EM zračenja tj.

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \tag{3.37}$$

gdje je h *Plankova konstanta*, a $\hbar$ *redukovana Plankova konstanta*. Vrijednost Plankove konstante je određena eksperimentalno i iznosi:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \tag{3.38}$$

odnosno

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}. \tag{3.39}$$

Plank je atome zamislio kao kvantne oscilatore koji mogu da se nalaze samo u određenim stanjima gdje je njihova energija jednaka cjelobrojnom umnošku najmanje količine energije $\hbar\omega$ tako da je energija n-tog stanja data sa:

$$\varepsilon_n = nh\nu = n\hbar\omega, \tag{3.40}$$

gdje je n=0,1,2,.. Ovaj pojam *kvantiziranosti energije* predstavlja rođendan kvantne fizike, a broj n se zove *kvantni broj*. Pri emisiji energije oscilatori prelaze iz jednog u drugo stanje skokovito ne prolazeći kroz međustanja. Model na kojem je Plank zasnovao svoje razmatranje je sličan modelu Rejli-Džinsa s tim što su Rejli i Džins kao energiju jednog oscilatora uzimali kT dok Plank ovu energiju zamjenjuje usrednjenom energijom iz mnoštva oscilatora energije ε_n. Vrijednost srednje energije iznosi:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \tag{3.41}$$

Ukoliko u Rejli-Džinsovu formulu (3.33) umjesto kT uvrstimo $\overline{\varepsilon}$ dobićemo da je:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{3.42}$$

ili

$$\phi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1}. \tag{3.43}$$

Gornji izrazi u potpunosti se slažu sa eksperimentalnim rezultatima.

Sad ćemo razmotriti ponašanje Plankove funkcije za dva granična slučaja talasne dužine λ.

Za veliko λ (malo ω) bit će $\hbar\omega << kT$ pa u izrazu (3.42) eksponencijalnu funkciju $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$ možemo razviti u red:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + ... \tag{3.44}$$

Zadržavajući se samo na linearnim članovima uvrstićemo jednačinu (3.44) u (3.42) odakle dobijamo:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT \tag{3.45}$$

što predstavlja Rejli-Džinsovu funkciju.

Za malo λ (veliko ω) vrijedi da je $\hbar\omega >> kT$ što znači da je funkcija $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$ velika pa u relaciji (3.42) možemo zanemariti jedinicu u nazivniku. Dobijamo da je:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \tag{3.46}$$

što predstavlja Vinovu funkciju. Odavde vidimo da su Rejli-Džinsova i Vinova funkcija samo granični slučajevi Plankove funkcije za velike i male vrijednosti λ.

Osim toga, koristeći Plankovu funkciju možemo izvesti Stefan-Bolcmanov zakon. Integralna emisiona moć bit će jednaka:

$$E_T = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \tag{3.47}$$

Uvešćemo smjenu: $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$; $d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$ pa imamo da je

$$E_T = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \tag{3.48}$$

Vrijednost integrala u jednačini (3.48) iznosi:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{3.49}$$

pa (3.48) postaje

$$E_T = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4. \tag{3.50}$$

U gornjoj relaciji σ predstavlja Stefan-Bolcmanovu konstantu koju možemo izračunati kad uvrstimo brojne vrijednosti za konstante k, $\hbar$, c i π:

$$\sigma = \frac{k^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\pi^4}{15} = 5,6696 \cdot 10^{-8} \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}. \tag{3.51}$$

Ovo je u odličnoj saglasnosti sa eksperimentalno određenom vrijednošću za σ. Iz Plankove formule možemo izvesti i Vinov zakon pomijeranja što ćemo pokazati u nastavku. Krenućemo od funkcije (3.43), diferenciraćemo je po λ i izjednačiti sa nulom:

$$\left[\frac{d\phi(\lambda, T)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_m} = 0 \tag{3.52}$$

$$\left[\frac{d\phi(\lambda, T)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_m} = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda^6} \frac{\left[\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT} e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}} - 5(e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}} - 1)\right]}{\left(e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}} - 1\right)^2} = 0. \tag{3.53}$$

Jednačina (3.53) će biti ispunjena ako je brojnik jednak nuli tj.

$$\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_m kT} e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_m kT}} - 5\left(e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_m kT}} - 1\right) = 0. \tag{3.54}$$

Uvešćemo smjenu:

$$\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_m kT} = x \tag{3.55}$$

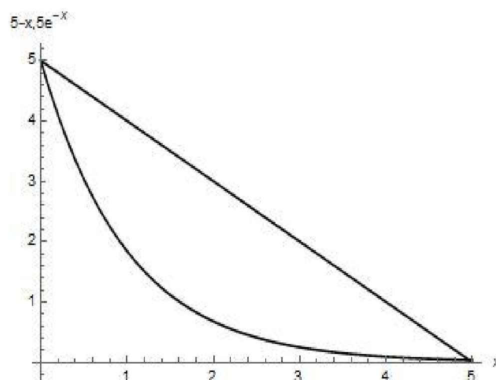
tako da se gornja jednačina svodi na:

$$xe^x - 5(e^x - 1) = 0. \tag{3.56}$$

Ako malo preuredimo (3.56) dobijamo da je:

$$5 - x = 5e^{-x}. \tag{3.57}$$

Ovo je transcedentna jednačina i može se riješiti numerički ili grafički. Ako ovo riješimo grafički (slika 3.5) vidimo da dobijamo dva rješenja, jedno je trivijalno ($x = 0$) dok nam je drugo rješenje $x = 4,965$.



Slika 3.5. *Grafičko rješenje transcedentne jednačine.*

Sad kad imamo x, iz relacije (3.55) možemo izračunati $\lambda_m T$ uvrštavanjem poznatih konstanti:

$$\lambda_m T = \frac{2\pi c\hbar}{4,965k} = b. \tag{3.58}$$

Dobijamo da je b=2,857·10^{-3} mK što je u odličnoj saglasnosti sa eksperimentalnom vrijednošću Vinove konstante.

Saglasnot eksperimenta i teorije dala je potvrdu da Plackova ideja o diskontinuiranoj emisiji energije ima smisla. Ovo je značilo kraj tradicionalnih shvatanja u klasičnoj fizici i elektrodinamici da se sve u prirodi dešava neprekidno. Ipak, postojala je određena sumnja u ispravnost Plankove pretpostavke, čak ni sam Plank nije bio baš potpuno uvjeren u njenu ispravnost. Međutim, u narednim godinama, pokazalo se da ova Plankova hipoteza ne samo da nije zamijenjena nekom boljom, već je uspjela objasniti cijeli niz eksperimenata koji se do tada nisu mogli objasniti, kao i cijeli niz drugih pojava iz svijeta atoma.

Poglavlje 4

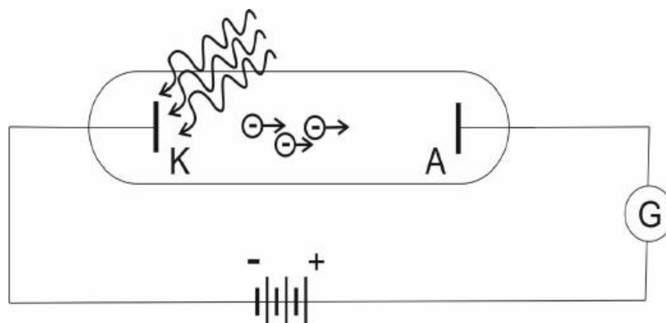
Potvrde kvantne prirode svjetlosti

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko eksperimentalnih činjenica koje su potvrdile Plankovu hipotezu o postojanju fotona tj. kvanata energije. To su:

1. Fotoelektrični efekat,
2. Kratkotalasna granica kontinuiranog dijela spektra X-zračenja,
3. Komptonov efekat i
4. Linijski spektri atoma.

4.1 Fotoelektrični efekat

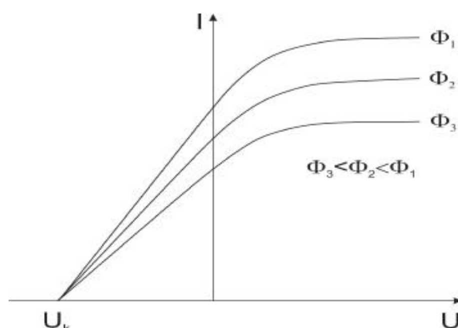
Njemački fizičar Hajnrih Rudolf Herc (Heinrich Rudolf Hertz) je 1887. godine otkrio, ali nije objasnio fotoelektrični efekat, koji je ostao zagonetka u fizici sve do početka XX vijeka. Pojava da materijal nakon što se obasja svjetlošću odgovarajuće frekvencije, koja je veća od neke granične vrijednosti, emituje elektrone naziva se **fotoelektrični efekat** ili **fotoefekat**. Izbijeni elektron se naziva *fotoelektron*. Uređaj za proučavanje fotoelektričnog efekta na metalima prikazan je na slici 4.1.



Slika 4.1. *Šematski prikaz uređaja za mjerenje fotostruje.*

Unutar vakuumske cijevi nalaze se dvije elektrode, katoda i anoda, između kojih postoji određena potencijalna razlika. Monohromatska svjetlost obasjava katodu iz koje izbija elektrone. Struja elektrona se registruje pomoću osjetljivog uređaja, galvanometra. Prilikom proučavanja fotoefekta prikupljen je veliki broj eksperimentalnih činjenica koje ćemo razmotriti u nastavku:

1. Fotostruja zasićenja je proporcionalna fluksu upadne svjetlosti Φ što je prikazano na slici 4.2. Vidi se da fotostruja raste dok ne dođe do zasićenja (svi elektroni su stigli sa katode na anodu) i da veći fluks daje veću struju zasićenja (veći broj elektrona).



Slika 4.2. *Zavisnost fotostruje od primijenjenog napona.*

2. Kada se primijeni obrnuta polarizacija elektroda (katoda pozitivna, a anoda negativna) moguće je struju fotoelektrona, čak i onih najbržih sa najvećom kinetičkom energijom, svesti na nulu. Napon pri kojem se ovo dešava naziva se **napon kočenja** ili **zakočni potencijal** U_k koji je također označen na slici 4.2. Možemo napisati da je

$$eU_k = E_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} \tag{4.1}$$

gdje je E_{max} kinetička energija najbržih elektrona, m je njihova masa, a v_{max} njihova brzina.

3. Za fotokatodu od datog materijala, fotoefekat će se desiti tek kad se ona obasja svjetlošću čija je frekvencija veća od neke granične vrijednosti. Ova granična frekvencija ω_0 zove se **crvena granica fotoefekta** i za veliki broj materijala leži u oblasti ultraljubičaste svjetlosti. Samo za alkalne metale (K, Na, Rb, Cs) ova granica je u crvenom ili infracrvenom dijelu spektra (odatle i naziv crvena granica jer su se eksperimenti najprije radili sa ovim materijalima).

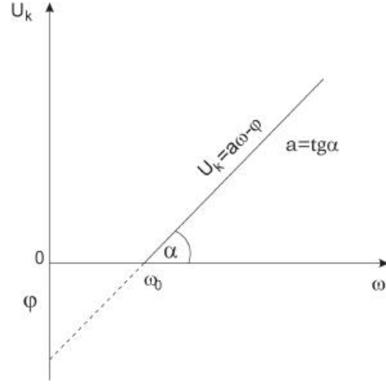
4. Struja se pojavljuje trenutno, gotovo istovremeno kad se površina metala obasja svjetlošću.

5. Eksperimenti su pokazali da je napon kočenja linearna funkcija frekvencije upadne svjetlosti tj.

$$U_k = a\omega - \phi, \tag{4.2}$$

gdje su a i ϕ neke konstante (ϕ zavisi od vrste materijala katode).

Ovo je prikazano na slici 4.3 gdje je sa ω_0 označena crvena granica fotoefekta.



Slika 4.3. *Zavisnost napona kočenja od kružne frekvencije.*

Ukoliko relaciju (4.2) pomnožimo sa e i iskoristimo (4.1) dobijamo:

$$E_{max} = eU_k = ea\omega - e\phi. \tag{4.3}$$

Pošto kinetička energija elektrona ne može biti manja od nule, slijedi da mora biti zadovoljeno:

$$ea\omega - e\phi \geqslant 0 \Rightarrow \omega \geqslant \frac{\phi}{a} = \omega_0. \tag{4.4}$$

Iz veze talasne dužine i kružne frekvencije (3.8), možemo izvesti i odgovarajući uslov za talasnu dužinu:

$$\lambda \leqslant \frac{2\pi ca}{\phi} = \lambda_0. \tag{4.5}$$

Vidimo da se iz eksperimentalnih razmatranja dobija vrijednost granične frekvencije odnosno talasne dužine-crvena granica fotoefekta. Svjetlost frekvencije manje od ω_0 tj. talasne dužine veće od λ_0 ne može izbiti elektrone iz datog metala.

Ove eksperimentalne činjenice bile su u potpunoj suprotnosti sa očekivanjima klasične fizike i elektrodinamike prema kojima je svjetlost talas. Prema klasičnoj fizici očekivalo se da:

1. Kinetička energija elektrona treba da poraste sa intenzitetom upotrebljene svjetlosti. Vidjeli smo da eksperimenti pokazuju da to nije slučaj. S porastom intenziteta svjetlosti raste samo struja zasićenja tj. broj elektrona, ali ne i njihova kinetička energija.

2. Fotoelektrični efekat treba da se dešava za svaku svjetlost odgovarajućeg intenziteta nezavisno od njene frekvencije, ali eksperimenti su pokazali da postoji neka granična frekvencija ispod koje se fotoefekat ne dešava bez obzira na intenzitet upotrijebljene svjetlosti.

3. Potrebno je određeno vrijeme da elektron koji je pogođen svjetlosnim talasom upije njegovu energiju i da napusti katodu, što nije u skladu sa eksperimentima koji su pokazali da je fotoefekat gotovo trenutan.

Objašnjenje fotoefekta dao je njemački fizičar Albert Ajnštajn (Albert Einstein) i za to je 1905. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku. Naime, već je bila poznata Plankova hipoteza o postojanju fotona - svjetlosnih kvanata koju smo ranije spominjali. Plank je ovu hipotezu iskoristio za objašnjenje zračenja apsolutno crnog tijela. Ajnštajn je Plankovu ideju proširio i na apsorpciju svjetlosti i predložio da se fotoelektrični efekat može objasniti tako da jedan svjetlosni foton pada na metal, predaje svu svoju energiju jednom elektronu unutar metala i onda prestaje da postoji. Minimalna količina energije koja je elektronu potrebna da napusti metal zove se **izlazni rad** i označava se sa A_i. Dakle, da bi se desio fotoefekat, elektron mora da primi energiju u iznosu izlaznog rada. Ostatak energije, ako ga ima, se troši na kinetičku energiju elektrona. To možemo napisati u slijedećem obliku:

$$h\nu = \hbar\omega = A_i + E_{max} = A_i + \frac{mv_{max}^2}{2}. \tag{4.6}$$

Ovo je poznato kao **Ajnštajnova jednačina fotoefekta** i ustvari predstavlja zakona o održanju energije. Vratićemo se sad na eksperimentalnu relaciju (4.3) i napisati je u malo drugačijem obliku

$$ea\omega = e\phi + E_{max}. \tag{4.7}$$

Poređenjem (4.6) i (4.7), te korištenjem slike 4.3 vidimo da je $\hbar = ea = e\text{tg}\alpha$ i $A_i = e\phi$, gdje a predstavlja nagib pravca, a ϕ odsječak na y osi. Mjerenjem zavisnosti $U_k(\omega)$ možemo odrediti vrijednost Plankove konstante i izlaznog rada. Izlazni rad je reda veličine nekoliko eV (1 eV=1,6·10^{-19} J). On zavisi od vrste metala i isti je za sve elektrone u jednom metalu. U tabeli 4.1 je dato nekoliko primjera za veličinu izlaznog rada različitih metala. Ukoliko se elektron nalazi smješten negdje dublje u metalu, trebaće mu veća energija od izlaznog rada da napusti metal što znači da će imati manju kinetičku energiju nakon izlaska iz metala.

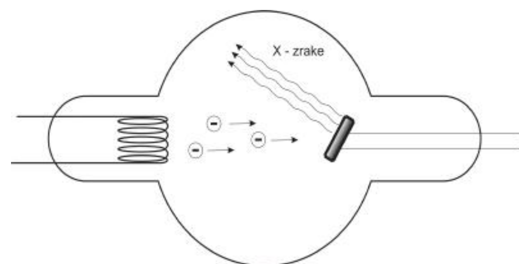
Metal	A_i (eV)	Metal	A_i (eV)
Li	$2,4$	W	$4,5$
Na	$2,1$	Pd	$5,0$
K	$2,0$	Pt	$6,3$

Tabela 4.1. Vrijednosti izlaznog rada za neke metale.

4.2 Kratkotalasna granica kontinuiranog dijela spektra X-zračenja

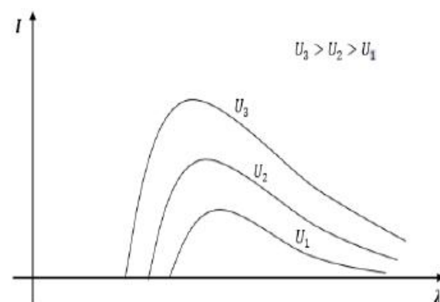
Fotoelektrični efekat je pokazao da fotoni mogu prenijeti svoju energiju elektronima. Postavlja se pitanje da li je moguć i obrnut proces tj. da li elektroni mogu prenijeti svu ili dio svoje kinetičke energije fotonu. Pokazalo se ne samo da ovaj

inverzni fotoefekat postoji, nego da je otkriven prije radova Planka i Ajnštajna. 1895. godine njemački fizičar Vilhelm Rendgen (Wilhelm Röntgen) je otkrio nepoznato prodorno zračenje koje nastaje kad se brzi elektroni sudaraju sa materijom. Brzo je otkriveno da se ovi tzv. X-zraci prostiru po pravim linijama, da na njih ne djeluju električna i magnetna polja, da prolaze kroz neprovidne materijale, da uzrokuju sjaj fosforescentnih materijala i da vrše ekspoziciju fotografskih ploča. Što su brži dolazni elektroni, to je zračenje prodornije i veći mu je intenzitet. Ubrzo nakon ovog otkrića postalo je jasno da su X-zraci EM talasi. Na slici 4.4 je prikazana rendgenska cijev.



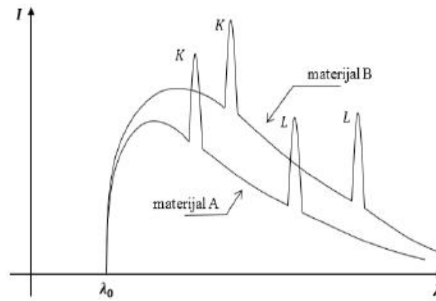
Slika 4.4. *Šematski prikaz rendgenske cijevi.*

Zagrijana katoda emituje elektrone koji uslijed ubrzavajuće razlike potencijala U, putuju prema metalnoj anodi. Anoda je nagnuta pod određenim uglom prema zraci elektrona. Cijev je evakuisana da bi se spriječili sudari elektrona sa atomima gasa. U procesu sudara elektrona sa anodom, najveći dio nastalog zračenja je toplotno zračenje, te je potrebno hladiti anodu vodom. Samo mali procenat zračenja, između 1 % i 3 %, odlazi iz cijevi u vidu X-zraka. Spektar rendgenskog zračenja je prikazan na slikama 4.5 i 4.6.



Slika 4.5. *Intenzitet zračenja I u zavisnosti od talasne dužine λ za različite napone ubrzanja U_1, U_2 i U_3 za isti materijal anode.*

Razlikujemo dva dijela ovog spektra: **kontinuirani** i **linijski**. Kontinuirani spektar koji se još zove i **zakočno zračenje** je prikazan na slici 4.5. Linijski spektar koji se još zove i **karakteristični** ili **diskretni** je superponiran na kontinuirani dio spektra i prikazan je u vidu pikova na slici 4.6. Vidimo da spektar ne kreće iz koordinatnog početka već uvijek postoji neka minimalna talasna dužina λ_0 u kratkotalasnom području. Izgled spektra zavisi od energije elektrona i materijala anode. Sve dok je energija upadnih elektrona mala, javlja se samo



Slika 4.6. *Intenzitet zračenja I u zavisnosti od talasne dužine λ za isti napon ubrzanja U za različite materijale anode A i B.*

kontinuirani spekatar. Sa slike 4.5 se vidi da se povećanjem ubrzavajućeg napona za isti materijal anode, postiže manje λ_0, ali nikad ne dostiže vrijednost nule. Za razne napone ubrzanja elektrona na istoj anodi nastaju X-zraci sa različitom minimalnom talasnom dužinom. Sa slike 4.6 se vidi da će za isti napon ubrzanja, intenzitet zračenja biti različit za različite materijale anode, ali će λ_0 za sve njih biti ista.

Eksperimentalno je nađena relacija koja utvrđuje vezu između λ_0 i napona ubrzanja U

$$\lambda_0 = \frac{1241}{U}. \tag{4.8}$$

U gornjoj relaciji λ_0 je izraženo u nm, a U u voltima. Klasična fizika nije dala odgovarajuće objašnjenje ovog fenomena jer prema klasičnoj fizici nema razloga da spektar rendgenskog zračenja ne kreće iz koordinatnog početka.

U nastavku ćemo objasniti kontinuirani spektar rendgenskog zračenja i postojanje λ_0, a linijski dio ćemo obraditi nešto kasnije. Kontinuirani dio spektra nastaje usporavanjem brzih elektrona kad se nađu u polju atomske jezgre u materijalu anode. Prilikom usporavanja elektron gubi dio svoje početne energije i pri tome emituje foton čija je energija jednaka razlici kinetičke energija elektrona prije i nakon sudara sa jezgrom. Prije sudara sa jezgrom kinetička energija elektrona zavisi od ubrzavajućeg napona i jednaka je

$$E_k = eU. \tag{4.9}$$

Ukoliko elektron izgubi svu svoju kinetičku energiju u jednom sudaru, nastaće foton maksimalne energije (tj. maksimalne frekvencije ili minimalne talasne dužine)

$$E_k = eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_0} \tag{4.10}$$

čime je potvrđena eksperimentalna relacija (4.8).

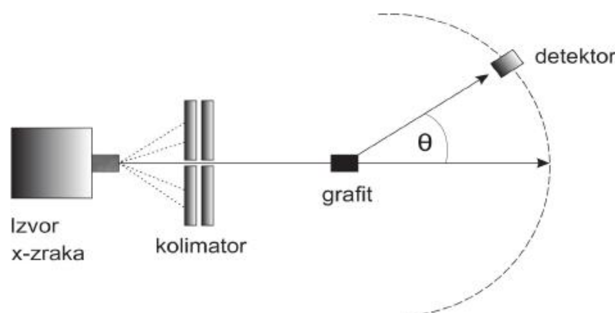
Usvajanjem ideje da elektron predaje svu svoju energiju jednom fotonu objašnjeno je postojanje λ_0. Općenito, elektroni usporavanjem u polju jezgre mogu izgubiti različite iznose energije pa zato nastaju fotoni različitih energija što daje kontinuiran spektar.Time je još jednom potvrđeno da ideja o postojanju

fotona može da objasni eksperimentalni rezultat koji nije mogao biti objašnjen klasično.

Zbog sposobnosti X-zraka da prolaze kroz neprovidne materijale, ubrzo nakon njihovog otkrića, započela je njihova upotreba u medicini. Unutar ljudskog tijela nalaze se kosti koje su veće gustoće i meka tkiva koja su manje gustoće. Uslijed te razlike u gustoći, slika koju dobijamo nakon izlaganja rendgenskom zračenju se sastoji od tamnijih i svjetlijih dijelova te je ovu metodu moguće koristiti u dijagnostičke svrhe.

4.3 Komptonov efekat

Prilikom rasijanja X-zraka na grafitu što je prikazano na slici 4.7, Kompton je 1923. godine opazio da rasijano X-zračenje ima malo veću talasnu dužinu od upadnog zračenja. Razlika tih dviju talasnih dužina zavisi od ugla rasijanja θ.



Slika 4.7. *Šematski prikaz Komptonovog efekta. X-zrake iz izvora prolaze kroz kolimator i rasijavaju se na grafitu. Na detektoru se opaža talasna dužina rasijanog zračenja.*

Ako sa $\lambda^{'}$ označimo talasnu dužinu rasijanog zračenja, a sa λ talasnu dužinu upadnog zračenja tada je njihova razlika $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda^{'} - \lambda = \lambda_c(1 - cos\theta), \tag{4.11}$$

gdje je λ_c tzv. *Komptonova talasna dužina*, konstanta koja je određena eksperimentalno i iznosi $2,426 \cdot 10^{-12}$ m. Sama jednačina (4.11) je poznata pod nazivom **jednačina Komptonovog rasijanja**.

Po klasičnoj EM teoriji rasijani zraci bi trebali imati istu talasnu dužinu kao i upadni. Kompton je rezultate svog eksperimenta uspio objasniti na osnovu postojanja fotona te je ovaj proces jednostavno razmatrao kao sudar fotona X-zraka i elektrona unutar grafita. Elektroni u sudaru dostižu brzine koje su bliske brzini svjetlosti pa treba koristiti relativističke formule za energiju i impuls elektrona. U teoriji relativnosti koja vrijedi kad se objekti kreću brzinama bliskim brzini svjetlosti energija je data sa

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}, \tag{4.12}$$

gdje je m_0 masa mirovanja čestice, p je impuls čestice, a c je brzina svjetlosti u vakuumu. Ranije smo spominjali da foton ima energiju $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$, ali

nismo ništa govorili o njegovom impulsu. Prema teoriji relativnosti foton ima masu mirovanja koja je jednaka nuli što znači da se on ne može nalaziti u stanju mirovanja. Foton postoji jedino dok se kreće brzinom svjetlosti. Ako u (4.12) uvrstimo da je za foton $m_0 = 0$ dobijamo da je

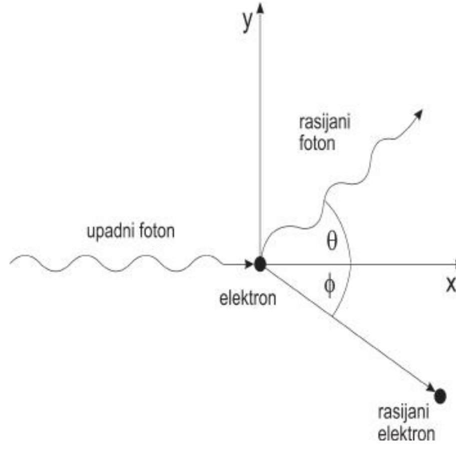
$$p = \frac{E}{c}. \tag{4.13}$$

Daljim uvrštavanjem energije fotona dobijamo da je impuls fotona

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k, \tag{4.14}$$

gdje je k talasni broj. Pošto je impuls vektorska veličina vrijedi da je $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ gdje je $\vec{k}$ talasni vektor.

Zamislimo da imamo foton X-zraka koji se sudara sa elektronom što je prikazano na slici 4.8.



Slika 4.8. *Foton X-zraka se rasijava na elektronu u grafitu.*

Prilikom sudara fotona i elektrona vrijede zakoni očuvanja energije i impulsa pa ćemo u nastavku definisati ove veličine.

Prije sudara impuls fotona je $\vec{p}_f$, a njegov intenzitet je $p_f = \frac{h\nu}{c}$. Pošto elektron prije sudara miruje, njegov impuls $\vec{p}_e$ jednak je nuli. Nakon sudara impuls fotona je $\vec{p}_{f'}$, a njegov intenzitet $p_{f'} = \frac{h\nu'}{c}$. Impuls elektrona je nakon sudara $\vec{p}_{e'}$.

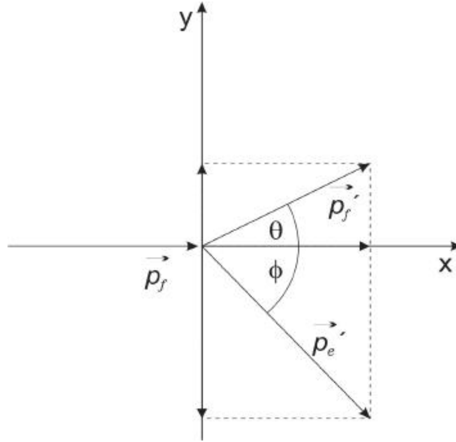
Energije fotona prije i poslije sudara su $\varepsilon_f = h\nu$ i $\varepsilon_{f'} = h\nu'$ respektivno, dok su energije elektrona prije i poslije sudara $E_e = m_0c^2$ i $E_{e'} = \sqrt{m_0^2c^4 + p_{e'}^2c^2}$ respektivno, gdje je m_0 masa mirovanja elektrona.

Prema zakonu održanja impulsa je

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{f'} + \vec{p}_{e'}. \tag{4.15}$$

Razložićemo vektore impulsa po x i po y-osi (vidjeti sliku 4.9). Za kretanje po x-osi vrijedi:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p_{e'}\cos\phi. \tag{4.16}$$



Slika 4.9. *Razlaganje vektora impulsa fotona i elektrona po x i po y-osi.*

Jednačinu (4.16) ćemo pomnožiti sa c i prvi član s desne strane prebaciti na lijevu što daje:

$$h\nu - h\nu^{'} \cos\theta = p_{e'} c \cos\phi, \tag{4.17}$$

a zatim ćemo izraz kvadrirati:

$$(h\nu - h\nu^{'} \cos\theta)^2 = p_{e'}^2 c^2 \cos^2\phi. \tag{4.18}$$

Za kretanje po y-osi vrijedi:

$$0 = \frac{h\nu^{'}}{c} \sin\theta - p_{e'} \sin\phi. \tag{4.19}$$

Kad prvi član s desne prebacimo na lijevu stranu, a zatim pomnožimo jednačinu sa c i kvadriramo je dobićemo:

$$(h\nu^{'} \sin\theta)^2 = p_{e'}^2 c^2 \sin^2\phi. \tag{4.20}$$

Sabiranjem (4.18) i (4.20) dobijamo

$$(h\nu)^2 - 2h\nu h\nu^{'} \cos\theta + (h\nu^{'} \cos\theta)^2 + (h\nu^{'} \sin\theta)^2 = \\ = p_{e'}^2 c^2 \cos^2\phi + p_{e'}^2 c^2 \sin^2\phi. \tag{4.21}$$

Zbog poznate činjenice iz trigonometrije koja kaže da je za neki ugao α, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ slijedi:

$$(h\nu)^2 - 2h\nu h\nu^{'} \cos\theta + (h\nu^{'})^2 = p_{e'}^2 c^2. \tag{4.22}$$

Iz zakona održanja energije imamo da je:

$$\varepsilon_f + E_e = \varepsilon_{f'} + E_{e'}. \tag{4.23}$$

Kad uvrstimo energije fotona i elektrona u gornju jednačinu dobijamo:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu^{'} + \sqrt{m_0^2c^4 + p_{e'}^2c^2}. \tag{4.24}$$

Možemo preurediti gornji izraz tako da na desnoj strani ostavimo samo član sa kvadratnim korijenom:

$$(h\nu - h\nu^{'}) + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + p_{e^{'}}^2c^2}, \tag{4.25}$$

a zatim (4.25) kvadriramo. Dobićemo da je

$$(h\nu)^2 - 2h\nu h\nu^{'} + (h\nu^{'})^2 + 2(h\nu - h\nu^{'})m_0c^2 = p_{e^{'}}^2c^2, \tag{4.26}$$

gdje smo sa lijeve i desne strane skratili isti član $m_0^2c^4$. Vidimo da su desne strane jednačina (4.22) i (4.26) jednake pa možemo izjednačiti i njihove lijeve strane:

$$\begin{aligned}(h\nu)^2 - 2h\nu h\nu^{'}\cos\theta + (h\nu^{'})^2 = \\ = (h\nu)^2 - 2h\nu h\nu^{'} + (h\nu^{'})^2 + 2(h\nu - h\nu^{'})m_0c^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Nakon skraćivanja određenih članova preostaće izraz:

$$m_0c^2(\nu - \nu^{'}) = h\nu\nu^{'}(1 - \cos\theta). \tag{4.28}$$

Kad gornji izraz podijelimo sa $\nu\nu^{'}$ dobićemo:

$$m_0c(\lambda^{'} - \lambda) = h(1 - \cos\theta). \tag{4.29}$$

Odavde konačno dobijamo:

$$\Delta\lambda = \lambda^{'} - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta). \tag{4.30}$$

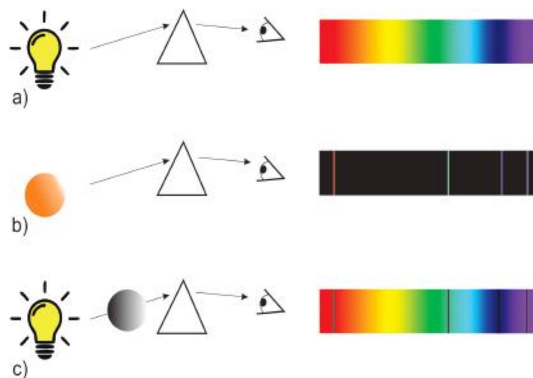
gdje je $\frac{h}{m_0c}$ Komptonova talasna dužina za elektron koja je nakon uvrštavanja datih konstanti u odličnom slaganju sa eksperimentalno utvrđenom vrijednošću λ_c=2,426$\cdot10^{-12}$ m.

4.4 Linijski spektri atoma

Užarena čvrsta tijela, tekućine i gasovi pri visokom pritisku i temperaturi emituju svjetlost s kontinuiranim talasnim dužinama. Tako npr. nit sijalice je izvor bijele svjetlosti. Bijela svjetlost se prolaskom kroz prizmu razlaže i na ekranu se vidi *kontinuiran* spektar zračenja što je prikazano na slici 4.10 a). Eksperimentalno je pokazano da su spektri atoma linijski, a ne kontinuirani. Linijski spektri atoma mogu biti *emisioni* i *apsorpcioni.*

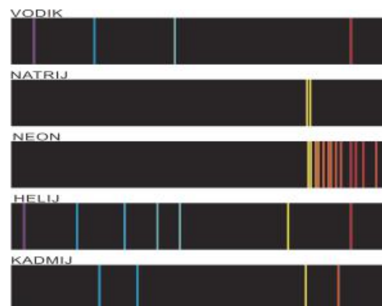
Emisioni spektar nastaje kad na neki način pobudimo atome (npr. prolaskom struje kroz gas ili paru koja je na nešto nižem pritisku od atmosferskog). Tad se iz gasnog pražnjenja snop svjetlosti usmjeri na prizmu koja vrši njeno razlaganje. Na zaklonu se vide linije koje odgovaraju samo određenim talasnim dužinama što je prikazano na slici 4.10 b). Ovo ustvari znači da su atomi gasa pobuđeni strujom emitovali samo određene talasne dužine.

Apsorpcioni spektar nastaje kad se snop bijele svjetlosti propusti kroz gas ili paru te se usmjeri na prizmu. Nakon prolaska kroz prizmu vidi se da u kontinuiranom spektru koji potiče od sijalice nedostaju neke linije što znači da jedan dio spektra nakon prolaska kroz gas ili paru apsorbuju prisutni atomi tako



Slika 4.10. *a) kontinuirani spektar, b) emisioni spektar, c) apsorpcioni spektar.*

da se pri izlasku iz prizme na mjestima apsorbovanih talasnih dužina pojavljuju tamne linije (slika 4.10 c)).
Bilo da se posmatra emisioni ili apsorpcioni spektar, svaki hemijski element pokazuje jedinstvenu raspodjelu frekvencija tj. svoj vlastiti spektar što se može vidjeti na slici 4.11. Dio fizike koji istražuje emisiju ili apsorpciju spektara naziva se *spektroskopija*. Ova mjerna tehnika je veoma zastupljena jer se frekvencije mogu mjeriti sa veoma velikom tačnošću od milijarditog dijela osnovne jedinice. Osnove praktične spektralne analize postavio je Kirhof 1859. godine. Nakon toga su urađeni mnogi eksperimenti i prikupljeno je veoma mnogo podataka o linijskim spektrima raznih elemenata. Interesantno je da je npr. helij otkriven pomoću spektralne analize Sunčeve svjetlosti prije nego što je izolovan na Zemlji. Zato je i dobio naziv koji potiče od grčke riječi helios što znači Sunce.



Slika 4.11. *Emisioni spektri različitih atoma.*

Prilikom proučavanja spektara uočeno je da se linije raspoređuju u određene nizove ili serije. Tražila se veza između spektralnih serija i moguće strukture atoma te se postavilo pitanje da li se može odrediti talasna dužina svjetlosti koja odgovara spektralnim linijama. Prvo je švajcarski fizičar Johan Jakob Balmer (Johann Jacob Balmer) 1885. godine otkrio da se vodikov spektar može prikazati jednostavnom matematičkom formulom. Njemu su bile poznate četiri linije iz vidljivog dijela spektra i ta serija je nazvana **Balmerova serija**. Uskoro su otkrivene i druge serije izvan vidljivog dijela spektra i dobile su nazive po naučnicima koji su ih otkrili: **Lajmanova** (Lymanova), **Pašenova** (Pashenova),

Braketova (Bracketova)...

Švedski fizičar Johanes Robert Ridberg (Johannes Robert Rydberg) je 1888. godine pokazao da se sve ove serije mogu predstaviti jednom formulom koja je poznata pod nazivom **Ridbergova formula**:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \tag{4.31}$$

gdje je λ talasna dužina, R_H=1,097·10^7 m^{-1} je *Ridbergova konstanta*, a m i n su cijeli brojevi pri čemu je $n<m$. Za svaku seriju n ima tačno određenu vrijednost, npr. za Lajmanovu seriju n=1 dok je za Braketovu n=2. Serije vodikovog spektra su prikazane u tabeli (4.2).

Serija	Područje zračenja	$\frac{1}{\lambda}(m^{-1})$	m
Lajmanova	UV	$R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	2,3,4,...
Balmerova	vidljivo	$R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	3,4,5,...
Pašenova	IR	$R_H\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	4,5,6,...
Braketova	IR	$R_H\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	5,6,7,...
Pfundova	IR	$R_H\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	6,7,8...

Tabela 4.2. Serije atoma vodika.

Ustanovljeno je da atomi emituju iste one frekvencije koje i apsorbuju. Tako će npr. na mjestu gdje su u emisionom spektru vodika bile svijetle linije, u apsorpcionom spektru biti tamne linije. Pokazalo se da modifikovana formula (4.31) vrijedi i za jone slične vodiku tj. jone koji imaju jedan elektron npr. He^+,Li^{2+},Be^{3+}:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \tag{4.32}$$

gdje je Z atomski broj tj. broj protona u jezgri.

U navedenim formula pojavljuju se cijeli brojevi n i m što je ukazivalo na izvjesne diskretne osobine atoma kroz šta se mogla naslutiti kvantiziranost nekih osobina atoma. Klasična fizika nije mogla objasniti nastanak linijskih spektara atoma. Spektre atoma je 1913. godine objasnio danski fizičar Nils Bor (Niels Bohr) uz pomoć svog modela atoma vodika o čemu će biti govora u nastavku.

Poglavlje 5

Modeli atoma

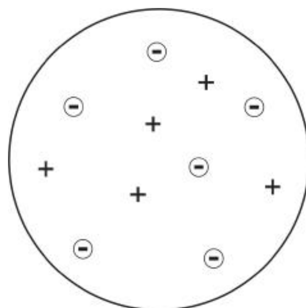
Ideja da se materija sastoji od nevidljivih čestica, atoma, datira još iz vremena starih Grka. Grčki filozof Demokrit (Democritus) je u IV vijeku p.n.e postavio prvu atomističku teoriju, smatrajući da se atom ne može dalje dijeliti. Ove ideje su bilo čisto spekulativne prirode jer nije bilo nikakvih eksperimentalnih dokaza o postojanju atoma. Tek razvojem mijerne tehnike, krajem XIX i početkom XX vijeka njihove hipoteze su se mogle i dokazati. Početak razvoja naučnog shvatanja atoma veže se za hemičare Lavoazijea (Lavoisier) i Prusta (Proust), te Daltona koji je mjerio mase pri stvaranju i razgrađivanju hemijskih jedinjenja i pri tome otkrio zakon o održanju masa. Međutim, pokazalo se da atom nije nedjeljiv već da se sastoji od manjih čestica. Prva elementarna čestica koja je otkrivena je bio elektron. Otkrio ga je britanski fizičar Džozef Džon Tomson (Joseph John Thompson) 1897. godine u Kevendiševoj (Cavendish) laboratoriji u Kembridžu (Cambridge). Koristio je eksperimente sa katodnom cijevi i uspio da odredi tzv. specifični naboj elektrona tj. odnos njegovog naboja i mase. Kasnije je Robert Endruz Miliken (Robert Andrews Millikan), američki fizičar, uspio da odredi naelektrisanje pojedinačnog elektrona pa je mogla biti izračunata i masa elektrona. U to vrijeme je procijenjeno da je red veličine atoma 10^{-10} m. Ova otkrića su bila osnova za razvoj prvih modela atoma.

5.1 Statički model atoma

Pošto se iz eksperimenata znalo da je elektron negativno naelektrisana čestica, a da je atom neutralan, došlo se do zaključka da unutar atoma mora postojati odgovarajući pozitivni naboj koji će kompenzirati negativni naboj elektrona. Jedan od prvih modela atoma, dao je 1903. godine Tomson koji je predložio da se atom sastoji od negativno nabijenih elektrona koji su utisnuti u pozitivnu podlogu. Ovaj model atoma se zove *statički*, *Tomsonov model atoma* ili *model "pudinga od šljiva"* jer podsjeća na puding u koji su utisnute šljive.

Prema ovom modelu koji je prikazan na slici 5.1, elektroni raspoređeni u sferi pozitivnog naboja bi trebali oscilovati oko svojih ravnotežnih položaja nekom frekvencijom ν. Naelektrisanje koje osciluje određenom frekvencijom trebalo bi da zrači EM talase iste te frekvencije tj. atom bi trebao da zrači neku "karakterističnu frekvenciju". Mjerenja nisu pokazala takvo zračenje iz atoma, ali bez obzira na to ovaj model se zadržao gotovo 13 godina dok nije eksperimentalno

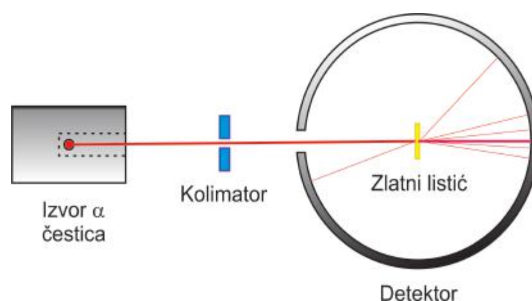
opovrgnut.



Slika 5.1. *Statički model atoma sa elektronima koji su utisnuti u pozitivnu podlogu.*

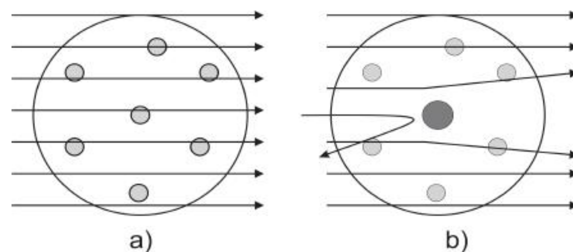
5.2 Raderfordov model atoma

Britanski fizičar lord Ernest Raderford (Ernest Rudherford) ispitivao je radioaktivnost i pokazao da postoje bar dvije vrste radioaktivnog zračenja iz urana: α i β. α čestice predstavljaju dvostruko jonizirane atome helija. U nastojanjima da dokaže Tomsonov model atoma, lord Raderford je sa saradnicima, Hansom Gajgerom (Hans Gaiger) i Ernestom Mardsenom (Ernest Mardesen), izvodio eksperimente sa tankim zlatnim listićima koje je bombardovao α česticama što je prikazano na slici 5.2.



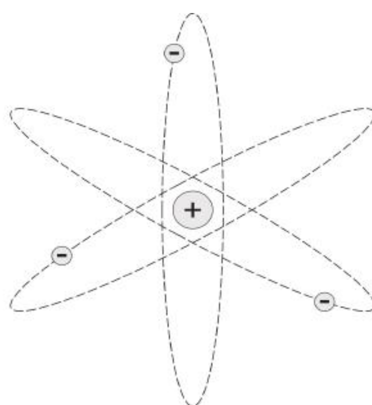
Slika 5.2. *Raderfordov eksperiment sa zlatnim listićima.*

Mjerni uređaj se sastojao od radioaktivnog elementa koji je služio kao izvor α čestica. Kroz male otvore na olovnim pločama snop α čestica se fokusirao i rasijavao na tankim zlatnim folijama debljine $3 \cdot 10^{-7}$ m. Pravac rasijanih α čestica se određivao na osnovu scintilacija na detektoru koji je bio premazan cink-sulfidom. Rezultati eksperimenta su bili iznenađujući. α čestice su pozitivno naelektrisane i ukoliko se uzme u obzir Tomsonov model atoma, očekivalo se da će one prilikom prolaska kroz atome zlata samo neznatno skretati sa svoje prvobitne putanje što je prikazano na slici 5.3 a). Ono što se desilo je da je većina čestica stvarno prolazila skoro neometano kroz zlato, međutim neke su čestice skretale pod velikim uglovima, a neke su čak vraćene i unazad što je prikazano na slici 5.3 b).



Slika 5.3. *a) Očekivano ponašanje α čestica prema modelu Tomsona b) Raderfordov prijedlog o postojanju jezgre u centru atoma.*

Raderford je na osnovu rezultata svojih eksperimenata predložio *planetarni model atoma* koji je prikazan na slici 5.4.



Slika 5.4. *Planetarni model atoma.*

Zaključio je da unutar atoma mora postojati tzv. *nukleus* ili *jezgra*, koja je pozitivno naelektrisana i nalazi se u centru atoma, a da se oko nje kreću elektroni po kružnim putanjama. Iz ovih eksperimenata je procijenjena i veličina jezgre na 10^{-14} m. Veliki dio atoma u stvari predstavlja prazan prostor tako da većina α čestica skoro ni ne skreće sa svoje putanje prolazeći kroz njega. Međutim, ako α čestica naiđe na jezgru onda dolazi do njenog rasijanja pod velikim uglom, čak i do rasijanja unazad.

Veliki problem s ovim modelom atoma je bio taj što bi došlo do kolapsa atoma. Naime, elektroni koji kruže oko jezgre bi nakon veoma kratkog vremena gubili energiju i pali na jezgru, tj. ne bi postojali stabilni atomi. Također, po klasičnoj teoriji takvi atomi bi trebali da emituju kontinuirane spektre, a eksperimenti su kao što smo ranije već rekli pokazali da su spektri atoma linijski.

5.3 Borov model atoma

Raderfordov model je poslužio kao osnova za razvoj *Borovog modela atoma.* Bor je od Raderforda preuzeo ideju o postojanju atomske jezgre i elektrona koji se kreću oko nje po kružnim putanjama. Sam je dodao dva postulata:

1. *Prvi Bohrov postulat*

Elektroni se u atomu ne mogu kretati po bilo kakvim, već po tačno određenim putanjama tzv. stacionarnim stazama ili orbitama. Krećući se po stacionarnim stazama, elektroni niti emituju niti apsorbuju energiju. Pri tome je moment impulsa elektrona kvantiziran tj.

$$mvr = n\hbar, \tag{5.1}$$

gdje je m masa elektrona, v je njegova brzina, r je radijus staze, $\hbar$ je redukovana Planckova konstanta, a n=1,2,3,.. je kvantni broj.

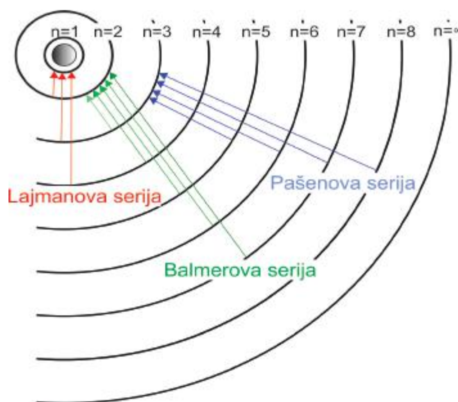
2. *Drugi Borov postulat*

   Elektron emituje ili apsorbuje energiju samo pri prelasku iz jednog stacionarnog stanja u drugo. Svjetlosni kvant koji se emituje (apsorbuje) jednak je razlici energija stacionarnih stanja između kojih se dešava prelazak:

$$h\nu = E_m - E_n = \Delta E, \tag{5.2}$$

   gdje su m i n cijeli brojevi koji označavaju redni broj orbite.

Jednačina (5.2) znači da će elektron preći sa niže orbite n na višu orbitu m ukoliko apsorbuje kvant energije $h\nu$ jednak razlici energija višeg i nižeg energetskog stanja. Prilikom spontanog povratka na nižu orbitu emitovaće se svjetlost frekvencije koja je tačno određena razlikom energija višeg i nižeg stanja. Emitovane energije imaju diskretan spektar tj. njihove vrijednosti su tačno određene. Primjenom Borovih postulata našlo se opravdanje za diskretnu strukturu atomskih spektara i mogle su se izračunati frekvencije tj. talasne dužine svake emitovane linije (slika 5.5). Sam Bor je izjavio:"Čim sam vidio Balmerovu formulu sve mi je bilo jasno".



Slika 5.5. *Objašnjenje linijskih spektara atoma.*

Iz Borovog modela atoma mogu se proračunati radijusi orbita kao i brzine i energije elektrona na orbitama u atomu vodika. Polazeći od činjenice da elektron kruži oko jezgre (protona) možemo napisati da je Kulonova (Coulomb) sila kojom proton djeluje na elektron jednaka centripetalnoj sili:

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}, \tag{5.3}$$

gdje je m masa elektrona, e naboj elektrona, ε_0 permitivnost vakuuma, a r_n i v_n su radijus n-te orbite i brzina elektrona na n-toj orbiti respektivno. Ukoliko iz jednačine (5.1) izrazimo brzinu na n-toj orbiti:

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \tag{5.4}$$

i uvrstimo je u (5.3) dobićemo izraz za radijus n-te orbite:

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2}. \tag{5.5}$$

Za n=1 gornja jednačina daje radijus prve Borove orbite koji iznosi $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m. Uobičajena oznaka za radijus prve Borove orbite u literaturi je i a_0. Radijusi viših orbita mogu se izraziti preko radijusa prve Borove orbite:

$$r_n = n^2 r_1, \tag{5.6}$$

tj. $r_2 = 4r_1$, $r_3 = 9r_1$, itd. Ukoliko uvrstimo (5.5) u (5.4) dobićemo brzinu elektrona na n-toj orbiti:

$$v_n = \frac{e^2}{2nh\varepsilon_0}. \tag{5.7}$$

Uvrštavanjem poznatih konstanti u gornju jednačinu dobije se da je brzina elektrona na prvoj stazi atoma vodika tj. u osnovnom stanju jednaka v_1=$2 \cdot 10^6$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ukupna energija elektrona na n-toj orbiti jednaka je zbiru njegove kinetičke i potencijalne energije:

$$E_n = E_k + E_p. \tag{5.8}$$

Kinetička energija elektrona data je sa:

$$E_k = \frac{mv_n^2}{2} \tag{5.9}$$

i kad u gornji izraz uvrstimo (5.7) dobićemo da je:

$$E_k = \frac{me^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.10}$$

Elektrostatička potencijalna energija tačkastog naboja u električnom polju po definiciji je jednaka negativnom radu koji je potreban da bi elektrostatička sila F_e premjestila naboj iz beskonačnosti do posmatrane tačke:

$$E_p = -\int_{r_n}^{\infty} F_e dr = -\int_{r_n}^{\infty} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_n}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}. \tag{5.11}$$

Kada u jednačinu (5.11) uvrstimo (5.5) dobijamo:

$$E_p = -\frac{me^4}{4n^2h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.12}$$

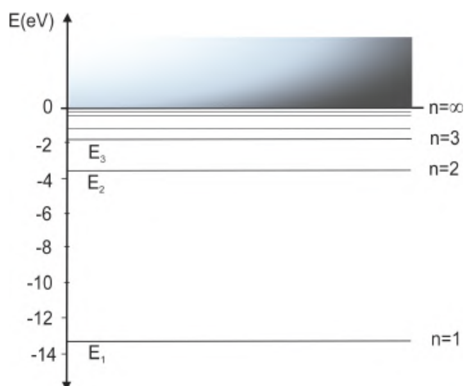
Ukupna enerija je onda jednaka

$$E_n = E_k + E_p = \frac{me^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2} - \frac{me^4}{4n^2h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{me^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.13}$$

Vidimo da je energija negativna što znači da je elektron u polju jezgre tj. u vezanom stanju. Također vidimo da je energija diskretna tj. $E \sim \frac{1}{n^2}$. Kad u (5.13) uvrstimo n=1 dobićemo energiju osnovnog stanja atoma vodika E_1=-13.6 eV. Energija pobuđenih stanja se može izraziti preko energije osnovnog stanja:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}. \tag{5.14}$$

Energetski nivoi u atomu vodika su prikazani na slici 5.6 gdje se vidi da će za veće vrijednosti kvantnog broja n energetski nivoi biti sve bliži. Za n=1 kažemo da je to osnovno stanje, za n=2 prvo pobuđeno stanje itd.



Slika 5.6. *Energetski nivoi atoma vodika su diskretni i negativni sve dok je elektron vezan za atom, a nakon što elektron napusti atom njegova energija postaje pozitivna i kontinuirana.*

Da bi elektron prešao u više stanje potrebno mu je dovesti energiju ekscitacije ili pobuđenja. Najveću energiju ekscitacije treba dovesti elektronu koji se odvodi sa osnovnog energetskog stanja na energetski nivo u beskonačnosti tj. elektronu koji se odvaja od atoma. Ta energija naziva se *energija jonizacije* i ona za vodik iznosi 13,6 eV. Ukoliko je elektron slobodan, njegova energija će biti pozitivna i kontinuirana. Ekscitovana energetska stanja su kratkotrajna tako da će se elektron nakon vrlo kratkog vremena (10^{-8} s) vratiti u osnovno stanje emitujući pri tome kvant energije krakteristične frekvencije.

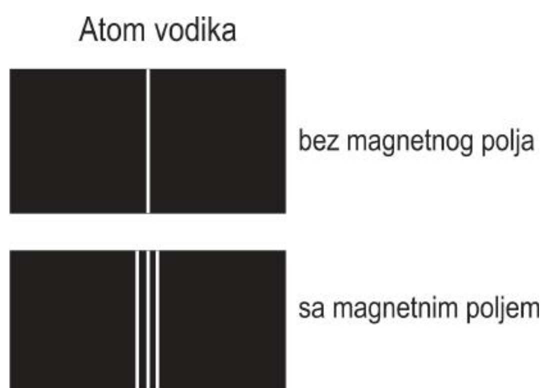
Značaj Bohrove teorije je u tome što je riješena stabilnost atoma, objašnjena je diskretna struktura atomskih spektara i tačno je izračunata energija jonizacije atoma vodika. Međutim veliki nedostatak Borove teorije je što vrijedi samo za atom vodika i njemu slične jone npr. He^+, Li^{++} koji sadrže samo po jedan elektron. Za takve jone vrijede iste formule kao ove koje smo do sad izveli, samo što u izrazima (5.5), (5.7) i (5.13) treba uzeti u obzir naelektrisanje jezgre Ze, gdje je Z broj protona u jezgri (atomski broj):

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{Z \pi m e^2}, \tag{5.15}$$

$$v_n = \frac{Z e^2}{2 n h \varepsilon_0}, \tag{5.16}$$

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.17}$$

Za složenije atome koji sadrže više od jednog elektrona, Borova teorija nije ponudila odgovarajuća objašnjenja. Jedna od eksperimentalnih činjenica koju Borov model atoma nije mogao da objasni je tzv. "fina struktura" tj. cijepanje atomskih linija kad se atom stavi u magnetno polje. Ovaj efekat je vidljiv pomoću spektralnih aparata sa velikom moći razlučivanja, a opazio ga je 1896. godine holandski fizičar Peter Zeman (Pieter Zeeman). Sama pojava naziva se *Zemanov efekat* (slika 5.7).



Slika 5.7. *Normalni Zemanov efekat.*

Njemački fizičar Arnold Zomerfeld (Arnold Sommerfeld) je u pokušaju usavršavanja Borovog, razvio model atoma gdje je pretpostavio da se elektroni ne kreću po kružnim već po eliptičnim orbitama. Uspio je u svojim relativističkim proračunima da objasni "finu strukturu" vodika, ali broj linija nije bio u saglasnosti sa eksperimentom. Također, nije bilo objašnjenja za atome sa više elektrona.

Borova i Zomerfeldova teorija poznate su pod nazivom "stara kvantna teorija" koja predstavlja prelaz između klasične i kvantno-mehaničke slike atoma. Stara kvantna teorija nikad nije bila dovršena nego je možemo posmatrati kao set određenih korekcija primijenjenih na klasičnu mehaniku. Tek kasnije, 20-ih godina XX vijeka nova fizikalna teorija, kvantna mehanika, uspjela je da na zadovoljavajući način opiše sve atome.

5.4 Potvrde Borovog modela atoma

Bez obzira na sve nedostatke Borovog modela atoma, postoje dvije eksperimentalne potvrde koje pokazuju da je Bor u svojim idejama bio djelimično u pravu:

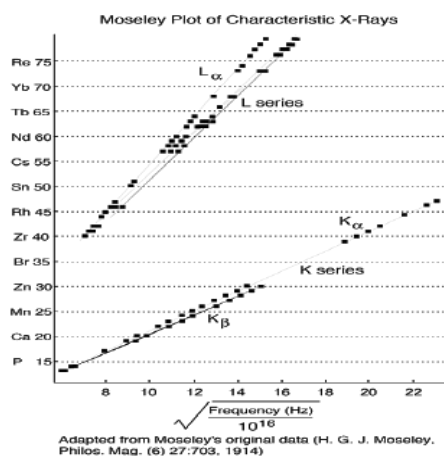
1. Linijski spektar X-zraka (Mozlijev zakon) i

2. Frank-Hercov eksperiment.

5.4.1 Linijski spektar X-zraka (Mozlijev zakon)

Kao što smo ranije napomenuli, X-zrake nastaju kad brzi elektroni udaraju u materijal mete. Vidjeli smo da se spektar X-zraka sastoji od kontinuiranog i diskretnog dijela. Kontinuirani dio spektra smo objasnili kočenjem brzih elektrona u polju atomske jezgre. Diskretni ili linijski dio spektra objasnio je britanski hemičar Henri Mozli (Henrey Moseley) na osnovu Borovog modela atoma.

Upoređujući spektre X-zraka za različite elemente, zapazio je da se prelaskom od lakših ka težim elementima sve linije ravnomjerno pomijeraju na stranu kraćih talasnih dužina, a da broj linija u spektralnoj seriji ostaje nepromijenjen (pogledati sliku 5.8). Ovu pravilnost u linijskom spektru X-zraka povezao je sa prelazima unutrašnjih elektrona u atomu na niža energetska stanja. Naime, ukoliko upadni brzi elektron ima dovoljno energije on može izbaciti neki od elektrona iz unutrašnje ljuske atoma mete. Prazno mjesto će se vrlo brzo popuniti elektronom iz neke gornje ljuske pri čemu će se emitovati foton čija energija je jednaka razlici energija gornje i donje ljuske. Emitovani foton je *karakteristični foton X-zračenja* i predstavlja jednistven "potpis" tog hemijskog elementa, a u spektru X-zraka ga vidimo kao diskretnu liniju superponiranu na kontinuirani dio. Upravo zbog te činjenice linijski spektri se mogu koristiti prilikom identifikacije hemijskih elemenata.



Slika 5.8. *Rezultati Mozlijevih eksperimenata.*

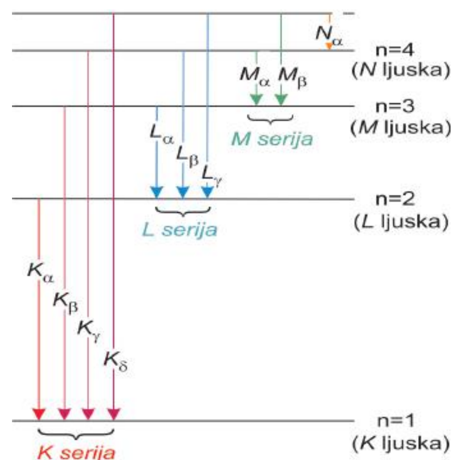
Mozli je iz Borove teorije (vidi formulu (5.17)) znao da je energija jona sličnih atomu vodika proporcionalna kvadratu njihovog atomskog broja tj. $E{\sim}Z^2$. Pretpostavio je da će energija emitovanog fotona također biti proporcionalna sa Z^2, tj.

$$\varepsilon = h\nu \sim Z^2. \tag{5.18}$$

U skladu s ovom pretpostavkom Mozlijevi rezultati sa slike 5.8 mogu se opisati jednačinom:

$$\sqrt{\nu} = A_n(Z - b). \tag{5.19}$$

U jednačini (5.19), A_n i b su konstante koje treba odrediti za svaku liniju u spektru. Skup linija za koje je glavni kvantni broj n=1 zovemo *K-serija* i za ovu seriju je vrijednost konstante b=1. K-serija predstavlja prelaze unutrašnjih elektrona sa viših energetskih nivoa na osnovni nivo (n=1). Drugi skup linija koji se zove *L-serija* predstavlja sve prelaze sa viših na prvi pobuđeni nivo (n=2) i za ovu seriju je b=7,4. Preostale serije imaju oznake M, N itd. u zavisnosti od broja n, što je prikazano na slici 5.9. Na slici se također vidi da se energetski nivo za koji je n=1 zove *K-ljuska*, za n=2 *L-ljuska* itd.



Slika 5.9. *Prelazi unutar atoma pri čemu se emituju X-zrake.*

Da bi objasnio svoje eksperimente, Mozli je krenuo od Borove formule (5.2). Uvrštavanjem (5.17) u (5.2) za prelaz između nivoa n i m dobio je izraz za frekvenciju emitovanog kvanta X-zračenja

$$\nu = \frac{me^4 Z^2}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{5.20}$$

Za K-seriju uvrstio je vrijednost n=1, a Z zamijenio sa Z-1:

$$\nu = \frac{me^4\left(Z-1\right)^2}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{5.21}$$

Množenjem i dijeljenjem (5.21) sa brzinom svjetlosti u vakuumu c dobijamo

$$\nu = cR_H\left(Z-1\right)^2\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \tag{5.22}$$

gdje je R_H Ridbergova konstanta. Poređenjem (5.22) sa (5.19) dobijamo da je konstanta A_n data sa

$$A_n^2 = cR_H\left(1 - \frac{1}{m^2}\right). \tag{5.23}$$

Talasne dužine linija u K-seriji će onda iz (5.22) biti

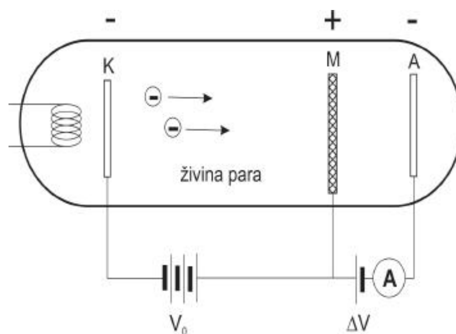
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{1}{R_H}\left(Z-1\right)^{-2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{-1}. \tag{5.24}$$

Činjenica da ν nije proporcionalno sa Z^2 već sa $(Z\text{-}1)^2$ može se objasniti pojavom *ekraniranja* ili *zaklanjanja* jezgre. Zna se da K-ljuska sadrži maksimalno dva elektrona. Ukoliko upadni brzi elektron izbaci jedan elektron iz K-ljuske, prazno mjesto će se popuniti elektronom iz više ljuske. Pri tome dolazi do kulonovske interakcije tog elektrona i jezgre, međutim sad u interakciju ne stupa Z pozitivnih naboja jezgre već njih Z-1 s obzirom da je jedan "neutralisan" tj. ekraniran drugim elektronom iz K-ljuske. Isto tako za L-ljusku smo rekli da je b=7,4. L-ljuska može maksimalno sadržavati 8 elektrona tako da očekujemo da će ekraniranje jezgre doći od 7 elektrona. Razlog zašto b nije tačno 7 tj. nije cijeli broj uzrokovano je činjenicom da proračun ekraniranja nije trivijalan i u njemu treba uvažiti kvantno-mehanički pristup i međusobnu interakciju elektrona. Međutim ovo jednostavno objašnjenje može nam pružiti približnu sliku o ovom fenomenu kao i o približnoj vrijednosti konstante b.

Iako Borov model vrijedi za vodik i njemu slične atome (jone sa jednim elektronom), Mozli je svojim eksperimentima uspio da objasni linijske spektre X-zraka za atome sa više elektrona, omogući korištenje X-zraka za identifikaciju elemenata, te pokaže da se atom sastoji od jezgre oko koje se nalaze elektroni. Njegova istraživanja su kao rezultat imala korekciju do tad poznatog periodnog sistema elemenata gdje su elementi bili poredani po atomskim težinama, a ne po atomskim brojevima.

5.4.2 Frank-Hercov eksperiment

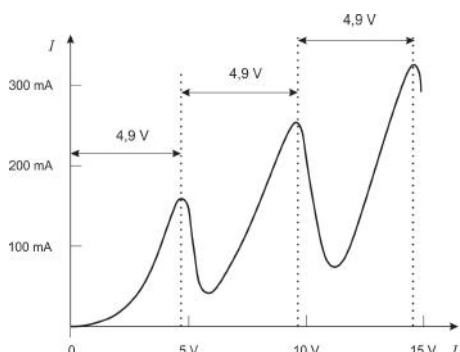
Džejms Frank (James Franck) i Gustav Herc (Gustav Hertz) su 1914. godine izveli prvi eksperiment koji je potvrdio Borovu pretpostavku da su energetski nivoi u atomima kvantizirani. Eksperimentalna postavka je prikazana na sici 5.10.



Slika 5.10. *Šematski prikaz Frak-Hercovog eksperimenta.*

U eksperimentu je korištena vakuumirana elektronska cijev sa tri elektrode (trioda): katodom K, mrežicom M i anodom (kolektorom) A. Unutar cijevi su bile živine pare. Mrežica je bila na potencijalu V_0 u odnosu na katodu, a kolektor na nešto nižem potencijalu V_k=V_0-ΔV. Sa užarene katode emitovani su elektroni koje je pozitivno nabijena mrežica privlačila i ubrzavala. Kinetička energija elektrona je $E = eV_0$. U eksperimentu je izmjerena zavisnost anodne struje I od ubrzavajućeg napona V_0 koja je prikazana na slici 5.11. Sa slike vidimo da će struja rasti sve dok napon ne dostigne kritičnu vrijednost od $4,9$ V, zatim će opadati pa će ponovo rasti do 2·4,9 V. Ovaj efekat će se ponavljati

svakih 4, 9 V. Sve dok je napon manji od 4, 9 V sudari elektrona sa atomima žive će biti elastični. Elektroni stižu do anode i sa porastom ubrzavajućeg napona ampermetar registruje porast struje. Kad ubrzavajući napon dostigne kritičnu vrijednost od 4, 9 V elektron se neelastično sudara sa atomom žive, predaje mu svoju energiju i time ga pobuđuje. Pošto je elektron izgubio energiju neće moći da savlada potencijalnu barijeru između mrežice i anode. Zato anodna struja pada, a struja mrežice raste. Daljim povećanjem napona anodna struja raste sve dok se ne dostigne kritična vrijednost od 9, 8 V. tj. 2·4,9 V kad elektron doživljava dva neelastična sudara itd.



Slika 5.11. *Anodna struja u zavisnosti od ubrzavajućeg napona.*

Objašnjenje ovog eksperimenta je da se atom žive može pobuditi ukoliko primi kvant energije od 4, 9 eV. Sve dok je energija manja od te vrijednosti do pobuđenja atoma neće doći. Kad se dostigne vrijednost od 4, 9 eV elektron unutar atoma žive prelazi iz osnovnog (n=1) u prvo pobuđeno stanje (n=2). Njegovim povratkom u osnovno stanje, prema Borovoj teoriji emituje se foton (pogledati relaciju (5.2)) tačno određene talasne dužine:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4,9\ \mathrm{eV}} \approx 254\ \mathrm{nm}. \tag{5.25}$$

Spektralnim aparatom je izmjereno da živine pare emituju svjetlost talasne dužine koja je približno 254 nm što je bila potvrda Borove pretpostavke o diskretnim energetskim nivoima u atomu.

5.5 Kvantno-mehanički model atoma

U našem svakodnevnom životu Njutnova (Newton) klasična mehanika dobro opisuje kretanje tijela pod uticajem sila. Međutim u mikrosvijetu, svijetu atoma, koristi se kvantna mehanika. Kvantno-mehanička slika atoma se bazira na činjenici da elektron ima talasna svojstva i da vrijedi Hajzenbergov princip neodređenosti što ćemo u nastavku razmotriti. Matematički aparat za opisivanje kvantno-mehaničkih sistema razvio je Ervin Šredinger (Ervin Schrödinger).

5.5.1 De Broljevi talasi

Do sad smo vidjeli da EM talase možemo posmatrati i kao čestice, fotone. Rekli smo da je energija fotona $\varepsilon = h\nu$, a njegov impuls $p = \frac{h}{\lambda}$. Francuski fizičar Luj de

Brolj (Luis de Broglie) je 1924. godine postavio hipotezu da, po analogiji sa prethodnim, možemo i svakoj materijalnoj čestici pridružiti talas čija je talasna dužina data formulom

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \tag{5.26}$$

gdje je p impuls date čestice, a m i v njena masa i brzina, respektivno. Gornja relacija poznata je pod nazivom **de Broljeva talasna dužina**. Možemo dakle reći da su de Broljevi talasi, talasi materije.

Uzmimo za primjer neki makroobjekat, npr. tenisku lopticu mase m=0,2 kg koja se kreće brzinom v=15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i izračunajmo de Broljevu talasnu dužinu:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{0,2\ \mathrm{kg} \cdot 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2,2 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{m}. \tag{5.27}$$

Izračunajmo sad de Broljevu talasnu dužinu za neki mikroobjekat, npr. elektron koji je ubrzan potencijalnom razlikom od U=100 V. Kinetička energija elektrona biće jednaka:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU, \tag{5.28}$$

gdje je e naboj elektrona, m je njegova masa, a v brzina. Odavde je:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \tag{5.29}$$

Sad je

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 100\ \mathrm{V}}{9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}}} = 1,2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}. \tag{5.30}$$

Da bi se moglo utvrditi da li je nešto talas, potrebno je ispitati njegova talasna svojstva npr. izvršiti eksperimente interferencije i difrakcije. Da bismo ispitali difrakciju potreba nam je odgovarajuća difrakciona mrežica. Difrakciona mrežica predstavlja niz pravilno poredanih pukotina čije međusobno rastojanje je reda veličine talasne dužine zračenja. Talasna dužina dobijena u (5.27) je veoma mala i difrakciona mrežica koja bi joj odgovarala ne postoji. Talasna dužina elektrona dobijena u (5.30) je reda veličine 10^{-10} m što odgovara redu veličine udaljenosti između atoma u kristalima. To nam govori da bi kristal mogao poslužiti kao difrakciona mrežica da se ispitaju talasna svojstva elektrona. Iz gornjih primjera možemo zaključiti da je de Broljeva talasna dužina u slučaju makroobjekata iz našeg svakodnevnog života zanemariva.

1927. godine, samo tri godine nakon de Broljeve hipoteze o postojanju talasa materije, talasna svojstva elektrona dokazali su američki fizičari Klinton Dejvidson (Clinton Davidson) i Lester Džermer (Lester Germer). Oni su usmjerili elektrone iz elektronskog topa na kristal nikla i opazili da dolazi do njihove difrakcije. Talasna dužina elektrona koja je izračunata iz ovog eksperimenta odgovarala je talasnoj dužini koja se dobije iz de Broljeve relacije. Ovim je potvrđeno da je de Brolj u svojim idejama o postojanju talasa materije bio u pravu.

Kasnije je izvršen niz eksperimenata u kojima je pokazano da osim elektrona, talasna svojstva imaju i neutroni, atomi pa čak i molekule. Ova pojava se zove **talasno-čestični dualizam** i karakteristična je i za svjetlost i za materijalne čestice. Vidjeli smo da EM zračenje nekad možemo posmatrati kao talase, a nekad kao čestice - fotone. Isto vrijedi i za materijalne čestice npr. elektrone koje nekad možemo posmatrati kao talase. Ubrzo nakon otkrića da su elektorni talasi, napravljen je prvi elektronski mikroskop. Naime, rezolucija optičkog mikroskopa koji koristi vidljivu svjetlost je ograničena zbog njene talasne dužine. Da bi se rezolucija povećala potrebno je koristiti manje talasne dužine kao što su talasne dužine elektrona. Elektronski mikroskop je omogućio da se vidi svijet koji je do tada bio nepoznat kao što je svijet pojedinačnih atoma, a također je omogućio i pomjeranje atoma unutar nekog materijala.

5.5.2 Hajzenbergov princip neodređenosti

Njemački fizičar Verner Hajzenberg (Werner Heisenberg) je 1927. godine postavio relacije neodređenosti koje govore o nepouzdanosti istovremenog mjerenja tzv. komplementarnih veličina. Komplementarne veličine su npr: položaj (x) i impuls (p_x) i energija (E) i vrijeme (t). Ovaj princip ustvari znači da postoji ograničenje na preciznost kojom možemo predvidjeti vrijednosti parova fizikalnih veličina koje određuju česticu kao npr. položaj i impuls. Ukoliko je položaj neke čestice x, a impuls te čestice p_x, Hajzenbergov princip kaže da mora biti zadovoljeno da je:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{5.31}$$

gdje je Δx neodređenost položaja, Δp_x je neodređenost impulsa, a $\hbar$ je redukovana Planckova konstanta. Isto ovo možemo napisati za neodređenost energije i vremena:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{5.32}$$

Razmotrićemo na jednom primjeru koliki značaj Heisenbergov princip neodređenosti ima u makro i mikro svijetu.

Pretpostavimo da imamo kuglicu mase $m = 0,2$ kg i da smo je stavili unutar jednakostraničnog "trokuta" (kao u igri bilijara) čije su stranice dužine x=30 cm. Njeno kretanje je ograničeno unutar "trokuta" pa možemo reći da je neodređenost njenog položaja Δx=30 cm. Koristeći (5.31) dobijamo da je neodređenost impulsa

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}. \tag{5.33}$$

Neodređenost impulsa je Δp_x=$m\Delta v_x$, gdje je Δv_x neodređenost brzine pa uvrštavanjem u (5.33) dobijamo

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ kg}} = 8,78 \cdot 10^{-34} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{5.34}$$

Razmotrimo sad kretanje elektrona u atomu. Elektron ima masu m=9,1·10 $^{-31}$ kg, a dimenzije atoma su reda veličine 10^{-10} m tako da je neodređenost položaja

takvog elektrona Δx=10^{-10} m. Neodređenost njegove brzine će onda biti

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 5,8 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{5.35}$$

Kad uporedimo ova dva rezultata možemo primijetiti da neodređenost mjerenja komplementarnih veličina u našem makrosvijetu nije značajna jer je jako mala. Međutim u mikrosvijetu ona postaje velika i veoma značajna. Ovdje ustvari možemo shvatiti i fundamentalnu razliku između klasične i kvantne mehanike. U klasičnoj mehanici, budućnost čestice je potpuno određena njenim početnim uslovima (položajem, impuslom i silama koje na nju djeluju). U svakodnevnom životu sve ove veličine možemo dobro odrediti tj. izmjeriti. Kvantna mehanika također daje vezu između opservabilnih veličina, ali postoji izvjesna neodređenost zbog Hajzenbergovog principa vezana za budućnost jer se početno stanje čestice ne može odrediti sa dovoljnom tačnošću. Kao što smo vidjeli, što više znamo o položaju čestice, to manje znamo o njenom impulsu pa prema tome i položaju u kasnijem vremenskom trenutku.

5.5.3 Šredingerova jednačina, talasna funkcija i vjerovatnoća

Pošto smo vidjeli da elektron možemo opisati kao talas onda je bilo očekivano da za njega vrijedi neka talasna jednačina. Takvu nerelativistički linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu postulirao je 1925. godine Ervin Šredinger (Erwin Schrodinger) za šta je 1933. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku. Elektron možemo predstaviti preko talasne funkcije čiji je simbol ψ. Radi jednostavnosti, ovdje ćemo predstaviti jednodimenzionalnu vremenski nezavisnu Šredingerovu jednačinu:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x) = 0, \tag{5.36}$$

gdje je E energija sistema, a V je potencijalna energija sistema. U tri dimenzije ova jednačina bi glasila:

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x,y,z) = 0. \tag{5.37}$$

Iako je Šredinger zaslužan za postuliranje i rješavanje gornje jednačine, jedan drugi fizičar, Maks Born (Max Born), je dao fizikalnu interpretaciju talasne funkcije. Sama talasna funkcija koja predstavlja amplitudu talasa materije može biti i pozitivna i negativna te ne može biti opservabilna i nema fizikalni smisao. Ono što ima fizikalni smisao je tzv. *gustoća vjerovatnoće* tj. kvadrat apsolutne vrijednosti talasne funkcije:

$$\rho = \psi\psi^* = |\psi|^2, \tag{5.38}$$

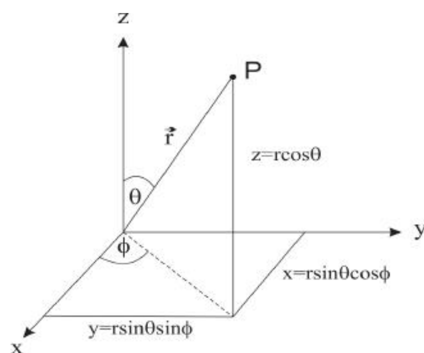
gdje je ψ^* kompleksno konjugovana vrijednost funkcije ψ. Ukoliko se radi o trodimenzionalnom problemu kao što je npr. problem nalaženja elektrona unutar atoma govorimo o gustoći po jedinici zapremine, a ako razmatramo problem koji je jednodimenzionalan govorimo o gustoći vjerovatnoće po jedinici dužine. Ukoliko je ρ veliko to znači da je vjerovatnoća da elektron nađemo na tom mjestu

velika. Sve dok god je gustoća vjerovatnoće različita od nule, bez obzira kako mala bila, postoji vjerovatnoća nalaženja čestice na tom mjestu. Prema tome, ovdje više ne možemo govoriti o tačno određenim putanjama elektrona. Ono što možemo odrediti je vjerovatnoća nalaženja elektrona na raznim mjestima u prostoru. Matematička vrijednost ove vjerovatnoće je između 0 i 1. Ovdje 0 znači "nikad", a 1 znači "uvijek". Npr. ako je vjerovatnoća nalaženja elektrona u okviru nekog radijusa 0,4, to znači da postoji 40 % mogućnosti da se elektron nađe na tom mjestu. Dok ne izvršimo mjerenje tj. dok ne izvršimo interakciju mjernog uređaja sa elektronom, mi ne znamo gdje će se taj elektron pojaviti jer postoji beskonačno mnogo vjerovatnoća da se on nađe negdje u prostoru. Samim postupkom mjerenja dolazi do kolapsa talasne funkcije i elektron se pojavljuje kao čestica na nekom mjestu u prostoru.

Najjednostavniji atom je atom vodika pa ćemo sad malo detaljnije pogledati kvantno-mehaničku sliku takvog atoma. Matematički aparat kvantne mehanike je dosta složen i mi ovdje nećemo rješavati Šredingerovu jednačinu za vodik, već ćemo uzeti gotovo rješenje za talasnu funkciju osnovnog stanja atoma vodika. Šredingerova jednačina za elektron u polju protona, u tri dimenzije je data sa (5.37). Potencijalna energija V je električna potencijalna energija i data je sa:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{5.39}$$

Ovaj problem je zgodno riješiti prelaskom sa Kartezijevih koordinata x, y, i z na sferne koordinate r, θ i ϕ koje su definisane na slici 5.12.



Slika 5.12. *Sferne koordinate.*

Sad će talasna funkcija zavisiti od r, θ i ϕ tj. umjesto $\psi(x,y,z)$ imaćemo $\psi(r,\theta,\phi)$. Sa slike 5.12 se vidi da je r dužina radijus vektora od koordinatnog početka do tačke P, θ je ugao između radijus vektora i pozitivnog smjera z-ose, a ϕ je ugao između projekcije radijus vektora u xy ravni i pozitivnog smjera x-ose. U sfernim koordinatama Šredingerova jednačina glasi:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0. \tag{5.40}$$

U ovoj jednačini može se izvršiti separacija varijabli tj. ona se može rastaviti na tri nezavisne jednačine. Ovakvo razdvajanje je moguće jer se talasna funkcija

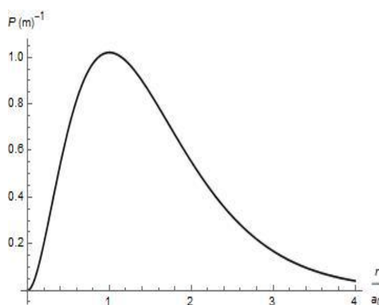
$\psi(r,\theta,\phi)$ može napisati kao proizvod tri funkcije koje zavise samo od po jedne varijable tj:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \tag{5.41}$$

Proračunom se dobija da je talasna funkcija osnovnog stanja atoma vodika:

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \tag{5.42}$$

gdje je r udaljenost elektrona od jezgre, a a_0 je Borov radijus. Kad kažemo da se elektron nalazi u osnovnom stanju, to nema isto značenje kao u Borovoj teoriji, jer u kvantnoj mehanici ne postoje jasno definisane orbite. Ovde veličinu a_0 uzimamo samo kao dogovorenu jedinicu mjere, isto kao što je to npr. 1 m u svakodnevnom životu. Korištenjem relacija (5.42) i (5.38) možemo izračunati funkciju radijalne gustoće vjerovatnoće $P(r)$ i predstaviti je grafički (slika 5.13). Sa slike možemo vidjeti da postoji vjerovatnoća da se elektron nađe na različitim radijalnim udaljenostima od jezgra, ali da je ta vjerovatnoća upravo najveća za $r{=}a_0$.



Slika 5.13. *Radijalna gustoća vjerovatnoće $P(r)$ u zavisnosti od r/a_0.*

Ranije smo u Borovom modelu dobili da se u osnovnom stanju elektron nalazi na udaljenosti a_0 od jezgre, dok u kvantno-mehaničkom modelu dobijamo da je to najvjerovatnija udaljenost na kojoj će se naš elektron naći, ali ne i jedina moguća. Po ovom modelu, elektron možemo zamisliti kao oblak negativnog naboja radi njegove talasne prirode. Za osnovno stanje atoma vodika taj oblak je sferno-simetričan, međutim za neka druga, viša stanja on ne mora biti sferno-simetričan. Ovaj oblak možemo interpretirati kao raspodjelu vjerovatnih položaja elektrona. Ukoliko bismo 1000 puta izmjerili položaj elektrona većina rezultata bi pala u tačke velike vjerovatnoće (oblasti veće gustine tačaka). Pojedinačni elektron može u raznim trenucima biti detektovan bilo gdje u ovom oblaku vjerovatnoće.

Uspjeh kvantne teorije je bio veoma veliki u objašnjenju spektara složenih atoma, čak i do najsitnijih detalja. Uspješno je objasnila i intenzitet spektralnih linija kao i razloge zašto atomi formiraju molekule. Postala je opšte prihvaćena teorija koja leži u osnovi svakog fizikalnog procesa. Ipak i do danas traju rasprave oko problema mjerenja u kvantnoj mehanici, tj. ponuđene su različite interpretacije da li uopšte i kako dolazi do kolapsa talasne funkcije jer se on ne može direktno opaziti.

5.5.4 Kvantni brojevi

U kvatnoj teoriji atoma moraju se uvesti kvantni brojevi kao rezultat rješavanja Šredingerove jednačine uz ograničenja koja nameću sferne koordinate r,θ i ϕ. Kao što smo rekli, možemo izvršiti separaciju varijabli te rješiti tri nezavisne jednačine koje zavise od pojedinačnih varijabli. Tako će naša talasna funkcija $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ zavisiti od tri kvantna broja n, l i m. Ovi brojevi određuju moguće vrijednosti energije E (broj n), intenziteta ugaonog momenta elektrona L (broj l) i projekcije tog ugaonog momenta na z-osu (broj m).

Kvantni broj n dobije se na osnovu ograničenja koja mora zadovoljiti tzv. radijalni dio talasne funkcije ψ tj. R(r). Rješavanjem tog dijela dobija se da je energija:

$$E_n = -\frac{me^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5.43}$$

Prepoznajemo da je ovo ista formula za energetske nivoe atoma vodika koju je dobio Bor, gdje je n-**glavni kvantni broj** koji može da poprimi vrijednosti:

$$n = 1, 2, 3, ... \tag{5.44}$$

Svi elektroni sa istim n pripadaju jednoj ljuski unutar atoma. Oznake za ljuske su K, L, M,...Tako je za:

1. n=1 oznaka ljuske K
2. n=2 oznaka ljuske L
3. n=3 oznaka ljuske M itd.

Kvantni broj koji je povezan sa koordinatom θ se dobije na osnovu ograničenja koja mora zadovoljiti funkcija $\Theta(\theta)$, označava se sa l i zove se **orbitalni kvantni broj**. Ovaj broj određuje intenzitet ugaonog momenta L:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \tag{5.45}$$

i može da poprimi vrijednosti

$$l = 0, 1, 2, 3, ..., (n-1). \tag{5.46}$$

Orbitalni kvantni broj određuje podljuske unutar atoma čije su oznake s, p, d,...Tako je za:

1. l=0 oznaka podljuske s
2. l=1 oznaka podljuske p
3. l=2 oznaka podljuske d itd.

Ukoliko je npr. vrijednost glavnog kvantnog broja n=2, a orbitalnog l=0 onda takvo stanje u atomu označavamo kao 2s.

Kvantni broj koji je vezan uz ograničenja koja nameće koordinata ϕ označava se sa m i zove se **magnetni kvantni broj**. Ovaj broj određuje vrijednosti koje može imati projekcija ugaonog momenta $\vec{L}$ na z-osu tj.

$$L_z = m\hbar \tag{5.47}$$

i može poprimiti vrijednosti

$$m = -l, -(l+1), ..0, ...(l+1), l. \tag{5.48}$$

Iz ovih razmatranja vidimo da kvantna mehanika daje diskretne, tačno određene vrijednosti energije, momenta količine kretanja i intenziteta njegove z-komponente.

Pokazalo se da ova tri kvantna broja nisu dovoljna za opisivanje svojstava atoma. Naime, spominjali smo ranije da u magnetnom polju dolazi do cijepanja atomskih linija što je vidljivo instrumentima sa velikom rezolucijom. Broj linija u eksperimentima nije odgovarao onome što se očekivalo na osnovu postojanja tri kvantna broja. Cijepanje linija je opaženo čak i bez prisustva vanjskog magnetnog polja i ova pojava je dobila naziv *anomalni Zemanov efekat* jer u doba kada je opažena nije mogla biti objašnjena. Da bi se ove pojave objasnile, Volfgang Pauli (Wolfgang Pauli) je 1925. godine predložio da se uvede novi kvantni broj. Taj četvrti kvantni broj Pauli je nazivao **spin** ili **spinski kvantni broj** (od engleske riječi to spin-okretati se). Holandski fizičari Samjuel Gudsmit (Samuel Goudsmith) i Džordž Ulenbek (George Uhlenbeck) pokušali su uz pomoć zakona klasične fizike objasniti da se ovaj novi kvantni broj dobija usljed vrtnje elektrona oko svoje ose. Naziv spin je i dalje ostao, ali ovaj kvantni broj nema nikakve veze sa vrtnjom elektrona i ne može se objasniti klasično. Rekli smo ranije da je Šredingerova jednačina nerelativistička. Britanski fizičar Pol Dirak (Paul Dirac) je izveo relativističku talasnu jednačinu koju mi ovdje nećemo razmatrati, a gdje se spin prirodno pojavljuje kao četvrti kvantni broj. Spin možemo posmatrati kao intrinsično svojstvo elektrona, baš poput njegove mase ili naelektrisanja, i povezan je sa njegovim vlastitim (spinskim) momentom količine kretanja $\vec{S}$. Intenzitet spinskog momenta količine kretanja je

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \tag{5.49}$$

gdje je s spinski kvantni broj. Iz podataka o spektrima za elektron je dobijena vrijednost spina $s = \frac{1}{2}$. Kao što $\vec{L}$ ima svoje projekcije na z-osu , ima ih i $\vec{S}$ i njihov intenzitet je određen sa:

$$S_z = m_s\hbar, \tag{5.50}$$

gdje je m_s **magnetni spinski broj** koji za elektron poprima dvije vrijednosti $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Naziv kvantnog broja	simbol	dozvoljene vrijednosti	broj stanja
glavni	n	1,2,3,4,...	∞
orbitalni	l	0,1,2,...$(n-1)$	n
magnetni	m	-l,-(l-1),...,0,...,(l-1),l	2l+1
magnetni spinski	m_s	$-\frac{1}{2}$,$+\frac{1}{2}$	2

Tabela 5.1. Kvantni brojevi.

Prema vrijednosti spina u fizici postoje dvije grupe čestica: fermioni i bozoni. Fermioni imaju polucijele vrijednosti spina i možemo zaključiti da je elektron fermion. Čestice sa cjelobrojnom vrijednošću spina se zovu bozoni i u njih spada

npr. foton. Treba napomenuti da spin elektrona s ima samo jednu vrijednost tako da i nije pravi kvantni broj već postoje četiri kvantna broja: n, l, m i m_s koja su data u tabeli (5.1).
Iz ovih razmatranja moglo bi se zaključiti da klasična fizika nije dobra teorija za opisivanje naše stvarnosti. Međutim to nije tačno, ona predstavlja samo granični slučaj kvantne fizike u limitu velikih kvantnih brojeva. Drugim riječima, ukoliko kvantni brojevi postaju veliki tad kvantna fizika prelazi u klasičnu. To odgovara našem makrosvijetu tako da sve pojave iz našeg svakodnevnog života možemo opisati klasičnom fizikom jer tada kvantni efekti postaju zanemarivi. U mikrosvijetu atoma moramo koristiti kvantnu fiziku.

5.5.5 Elektronska konfiguracija

Pauli je 1925. godine formulisao **Paulijev princip zabrane** koji kaže da u atomu ne mogu postojati dva elektrona koja imaju sva četiri kvantna broja ista. Na osnovu Paulijevog principa, krećući od atoma vodika i dodajući po jedan elektron, može se izgraditi cijeli periodni sistem elemenata.

Osim toga, prvo se popunjavaju najniže ljuske i podljuske jer imaju manju energiju. Podljuska je popunjena kad sadrži $2(2l+1)$ elektrona, a ljuska kad sadrži $2n^2$ elektrona. Prilikom određivanja rasporeda elektrona u atomima mora se slijediti još jedno pravilo tzv. *Hundovo pravilo* koje kaže da je najstabilniji aranžman elektrona u podljusci onaj sa najvećim brojem nesparenih spinova.

Najniža energija je određena $n+l$ pravilom što znači da suma ova dva kvantna broja određuje najnižu energiju (što je manja ova suma, manja je i energija). Ukoliko se desi da su neke dvije sume iste, onda niža vrijednost n određuje nižu energiju. Krećući od vodika koji ima jedan elektron njegova elektronska konfiguracija bi bila $1s^1$, za helij $1s^2$, litij $1s^2 2s^1$ itd. Međutim za skandijum Sc koji ima 21 elektron, elektronska konfiguracija bi bila $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^1$. Ovdje možemo primijetiti da je stanje $4s$ prije stanja $3d$ zbog toga što je zbir $n+l$ za stanje $4s$ jednak 4+0=4, dok je za stanje $3d$ taj zbir 3+2=5 što znači da stanje $4s$ ima manju energiju pa se prije popunjava.

Poglavlje 6

Fizika atomske jezgre

6.1 Osnovna svojstva i struktura jezgre

Nuklearna fizika je grana fizike koja se bavi svojstvima atomske jezgre, njenom strukturom kao i procesima koji se unutar nje odvijaju. Njen razvoj počeo je krajem XIX vijeka, a svoj procvat je doživjela u XX vijeku pa se on s pravom naziva vijek nuklearne fizike.

Raderford je u svojim eksperimentima pokazao da se atom osim elektrona još sastoji od atomske jezgre, a kasnije su otkriveni proton i neutron za koje danas znamo da ulaze u njen sastav. Protoni i neutroni se jednim imenom nazivaju **nukleoni**. Smatra se da je prečnik jezgre 1000 puta manji od prečnika atoma i da je gotovo sva masa atoma skoncentrisana u jezgri. Struktura protona i neutrona je složena i tek je djelimično istražena. Sastoje se od još elementarnijih čestica koje se zovu *kvarkovi.* Proton je sastavljen od dva "*up*" i jednog "*down*" kvarka što se označava kao-*uud*, a neutron od jednog "*up*" i dva "*down*" kvarka u oznaci *udd.*

Nuklid je atom sa tačno definisanim brojem protona Z i brojem neutrona N u jezgri. Broj protona se još zove i *atomski broj.* Zbir broja protona i neutrona $Z{+}N$ označava se oznakom A i naziva se *maseni* ili *nukleonski* broj. Svi atomi sa jednakim brojem protona i neutrona pripadaju istom nuklidu, mada njegova jezgra mogu biti u različitim energetskim stanjima. Nuklidi mogu biti stabilni i nestabilni. Stabilni nuklidi ne emituju nikakvu vrstu zračenja, dok se nestabilni spontano raspadaju. To su *radioaktivni nuklidi* ili *radionuklidi.* Da bismo opisali neki nuklid potrebno je zadati njegov maseni broj A i atomski broj Z što možemo iskazati simbolom ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, gdje je X hemijski simbol elementa.

Nuklidi koji imaju jednak maseni broj A nazivaju se *izobarni nuklidi* ili *izobari*, npr. dva izobara su (A=96):



$$ {}^{96}_{38}\mathrm{Sr} \text{ i } {}^{96}_{40}\mathrm{Zr}. \tag{6.1}$$

Nuklidi sa jednakim brojem protona Z, a različitim brojem neutrona N nazivaju se *izotopski nuklidi* ili *izotopi.* Izotopi pripadaju istom hemijskom elementu što znači da broj protona određuje hemijski element. Izotopski kvartet urana je (Z=92):



$$ {}^{234}_{92}\mathrm{U},\ {}^{235}_{92}\mathrm{U},\ {}^{236}_{92}\mathrm{U} \text{ i } {}^{237}_{92}\mathrm{U}. \tag{6.2}$$

Izotopski triplet vodika je (Z=1):

$$^1_1\text{H}, ^2_1\text{H i } ^3_1\text{H}. \tag{6.3}$$

Prvi u nizu je vodik i njegova jezgra je sastavljena samo od jednog protona, drugi je deuterij koji u jezgri još ima i jedan neutron, dok je treći u nizu tricij koji osim protona u jezgri ima dva neutrona. Jezgre deuterija i tricija se nazivaju deuteron i triton.

Nuklidi sa jednakim brojem neutrona nazivaju se *izotonični nuklidi ili izotoni*. Primjer tri izotona je (N=20):

$$^{36}_{16}\text{S}, ^{37}_{17}\text{Cl i } ^{40}_{20}\text{Ca}. \tag{6.4}$$

Hemijska svojstva nekog elementa zavise od broja i rasporeda elektrona unutar atoma. Pošto izotopi imaju skoro identičnu elektronsku strukturu, nije iznenađujuće da npr. dva izotopa hlora imaju istu boju, miris, otrovni su itd. Pošto tačke ključanja i smrzavanja zavise od atomske mase, one su nešto različite za ova dva izotopa, isto kao i njihove gustoće. Ostale fizikalne osobine izotopa mogu više zavisiti od masenog broja, npr. tricijum je radioaktivan dok obični vodik i deuterijum nisu. Eksperimentalno je utvrđeno da neutralni atom u jezgri ima isti broj protona kao i elektrona u omotaču. Utvrđeno je da je naelektrisanje protona po iznosu isto kao i naelektrisanje elektrona, ali suprotnog predznaka. Ukupno naleketrisanje jezgre je onda $+Ze$, $e = 1,6 \cdot 10^{19}$ C. Mase nuklida su praktično jednake masama atoma jer je masa elektrona u omotaču zanemariva tako da je 99, 9 % mase atoma u njegovoj jezgri. Atomske mase se izražavaju u atomskim jedinicama mase (1 ajm ili 1 u). Atomska jedinica mase se definiše kao 1/12 mase izotopa $^{12}_{6}$C:

$$1 \text{ ajm} = \frac{1}{12}\, \text{m}_{^{12}_{6}\text{C}} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} . \tag{6.5}$$

Zbog Ajnštajnove relacije koja povezuje masu sa energijom, $E = mc^2$, uobičajeno je da se u nuklearnoj fizici mase izražavaju pomoću odgovarajućih energetskih ekvivalenata. 1 ajm odgovara energetski ekvivalent od 931.49 MeV. U tabeli 6.1 su date mase mirovanja protona, neutrona i elektrona.

naziv	oznaka	masa (kg)	masa (ajm)	masa ($\frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$)
proton	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	1,007276	938,28
neutron	m_n	$1,6750 \cdot 10^{-27}$	1,008665	939,57
elektron	m_e	$9,1095 \cdot 10^{-31}$	$5,486x10^{-4}$	0,511

Tabela 6.1. Mase mirovanja.

Vidimo da su mase protona i neutrona približno jednake i puno veće od mase elektrona tj. vrijedi:

$$m_n \approx m_p = 1836\ m_e. \tag{6.6}$$

Raderfordovi eksperimenti rasijanja dali su prve procjene veličine jezgre. Od tada je urađen veliki broj eksperimenata rasijanja brzih elektrona ili neutrona na jezgrama. Iz rezultata ovih istraživanja moglo se zaključiti da sve jezgre imaju veliku, približno jednaku gustoću i da su približno sferne, te da čak i

jezgre sa velikim brojem nukleona zauzimaju mali volumen. Pokazalo se da je volumen jezgre V proporcionalan masenom broju A. Ako sa R označimo radijus jezgre, onda je njen volumen $V = \frac{4}{3}R^3\pi$, dakle možemo napisati da je radijus jezgre

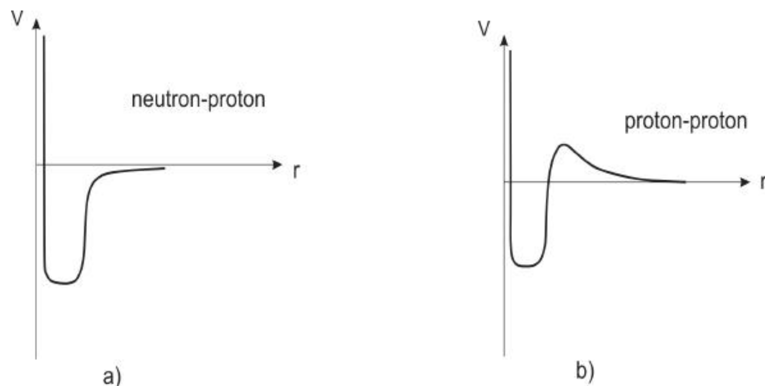
$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \ . \tag{6.7}$$

R_0 je konstanta koja se kreće u intervalu od $1,05$ do $1,45$ fm i dobiva se eksperimentalno. Obično se uzima da je približno $1,2$ fm. Vidimo da su jezgre veoma male tako da je jedinica za mjerenje njihove veličine femtometar (fm) što odgovara 10^{-15} m. Femtometar se često naziva i $fermi$ u čast Enrika Fermija (Enrico Fermi), pionira nuklearne fizike. Na kraju možemo reći da su i jezgre kao i atomi podvrgnute zakonima kvantne fizike te da imaju osnovno i pobuđena stanja. Pri prelazima iz pobuđenih u osnovna stanja emituju se fotoni tzv. gama kvanti o čemu će biti govora kasnije.

6.2 Nuklearne sile

Stabilnost hemijskih elemenata u prirodi ukazuje na to da unutar jezgre mora postojati privlačna sila puno većeg intenziteta od odbojne elektrostatičke sile među istoimeno naelektrisanim protonima u jezgri. Ta sila koja nukleone unutar jezgre drži zajedno zove se **jaka sila**. Ona je najjača u prirodi, ali je i najkraćeg dometa, ograničenog na volumen jezgre. Na udaljenostima koje su veće od 2-3 fm njen uticaj nestaje i proton "vidi" samo odbojnu kulonovsku silu. Jaka sila djeluje između svih nukleona u jezgri na isti način (protona i protona, protona i neutrona i neutrona i neutrona) tj. ne zavisi od naboja. Odgovorna je za procese fuzije u zvijezdama, eksplozije nuklearnih bombi i dobivanje nuklearne energije u elektranama. Jaka sila ima osobine zasićenja, tj. svaki nukleon međudjeluje sa ograničenim brojem svojih susjeda. To je razlog zašto teži elementi nisu stabilni - s povećanjem broja nukleona elektromagnetna interakcija preovladava jaku interakciju i dolazi do raspada jezgre. Za razliku od npr. gravitacione ili elektromagnetne sile, jaku silu nije moguće opisati jednačinom već je poznajemo samo kvalitativno. Približan izgled potencijala ove sile koji je prikazan na slici 6.1 može se dobiti iz eksperimenata rasijanja protona na protonima i neutrona na protonima.

Na slici 6.1 *a*) vidimo rezultat *neutron-proton* međudjelovanja. Na rastojanjima većim od 2 fm nema međudjelovanja između njih, ali kad se oni dovoljno međusobno približe javlja se privlačna nuklearna sila što se vidi u padu potencijala. Kad međusobno rastojanje postane previše malo uspostavlja se odbojna interakcija između njih. Na slici 6.1 *b*) prikazano je *proton-proton* međudjelovanje. Na rastojanjima većim od 3 fm protoni se odbijaju usljed kulonovske odbojne sile između istoimenih naelektrisanja. Međutim kad se dva protona dovoljno približe vidi se pad u potencijalu što označava uspostavljanje privlačne nuklearne sile između dva protona koja nadvladava Kulonovu silu. Kad se dva protona previše približe tad ponovo nastupa njihovo međusobno odbijanje. Što se tiče *neutron-neutron* međudjelovanja takve eksperimente nije moguće izvesti jer se neutroni jako teško dobijaju u slobodnom stanju pa je metu sastavljenu od neutrona nemoguće napraviti, ali na osnovu nekih indirektnih pokazatelja takvo međudjelovanje je isto kao između protona i neutrona. Pored jake sile

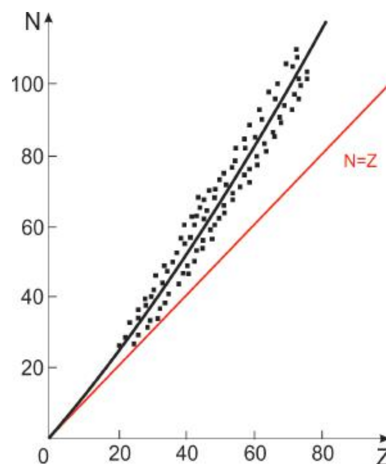


Slika 6.1. *Nuklearni potencijal međudjelovanja a) neutrona i protona i b) protona i protona u zavisnosti od njihovog međusobnog rastojanja r.*

u jezgri se pojavljuje i **slaba sila** koja je odgovorna za prelaze unutar jezgre atoma poput tzv. β raspada (o kojem će kasnije biti govora).

6.3 Nuklearna stabilnost, defekt mase i energija veze

Stabilan nukleus je onaj koji ne emituje nikakvu vrstu zračenja. Nema konkretne teorije o tome zašto su neke jezgre stabilne, a druge nisu. Pokazalo se da je najvažniji odnos broja protona i neutrona u jezgri. Ne daju sve kombinacije neutrona i protona stabilne nukleuse. Općenito, lakše jezgre ($A<20$) sadrže približno jednak broj neutrona i protona, dok se kod težih jezgara broj neutrona u odnosu na broj protona povećava što je prikazanio na slici 6.2.



Slika 6.2. *Crvena linija predstavlja jednak broj protona i neutrona. Crna linija predstavlja stabilne izotope i primijetno je da se sa povećanjem atomskog broja povećava broj neutrona u odnosu na broj protona. Crne tačkice predstavljaju nestabilne izotope.*

Tendencija da N bude jednako Z se javlja usljed postojanja nuklearnih energetskih nivoa. Nukleoni, čiji je spin 1/2 zadovoljavaju Paulijev princip isključenja. Zbog toga svaki nuklearni energetski nivo može sadržavati dva neutrona suprotnih spinova i dva protona suprotnih spinova. Energetski nivoi u jezgri se popunjavaju slično kao energetski nivoi u atomu, da bi se postigla konfiguracija minimalne energije tj. maksimalne stabilnosti. Protoni koji su pozitivno naelektrisani se međusobno odbijaju. U jezgrama sa više od 10 protona, ovo odbijanje postaje tako veliko, da je potreban višak neutrona koji proizvode samo privlačne sile da bi se održala stabilnost jezgre. Prisustvo neutrona razmiče protone i smanjuje odbijanje između njih, a s druge strane doprinosi stvaranju privlačne nuklearne sile koja djeluje i na protone i na neutrone. Oko 60 stabilnih jezgara imaju parne i Z i N. Skoro sva ostala imaju ili parno Z ili parno N. Poznato je samo pet stabilnih jezgara čiji su i Z i N neparni. Ova činjenica je u saglasnosti sa postojanjem nuklearnih energetskih nivoa koji mogu sadržavati samo po dvije čestice suprotnih spinova. Jezgre sa popunjenim energetskim nivoima imaju manju tendenciju da primaju druge nukleone nego one sa djelimično popunjenim energetskim nivoima pa je i manja vjerovatnoća da će učestvovati u nuklearnim reakcijama. Pošto je kulonovsko odbijanje protona dosta veliko unutar jezgre, broj neutrona koji sprječavaju raspad velike jezgre neće neograničeno moći rasti. Najteži stabilni izotop je izotop bizmuta $^{209}_{83}$Bi. Sve jezgre sa $Z>83$ i $A>209$ spontanto se transformišu tj. raspadaju u lakše jezgre. Vremenska skala ovih procesa raspada ide od dijela mikrosekunde do nekoliko milijardi godina.

Eksperimentalno je utvrđeno da masa mirovanja jezgre m_j nije jednaka zbiru masa mirovanja njenih sastavnih dijelova. Smanjenje mase u jezgri naziva se **defekt mase** i označava se sa Δm te ga možemo izraziti kao:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_j \ . \tag{6.8}$$

Energetski ekvivalent defekta mase zove se **energija veze** i može se izračunati kao:

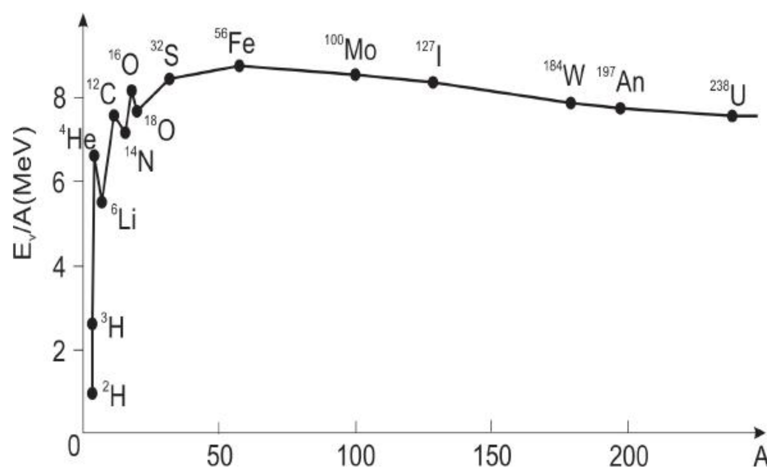
$$E = \Delta mc^2 \ . \tag{6.9}$$

Razmotrimo to na jednom primjeru. Deuterij u jezgri osim protona ima i jedan neutron. Očekivali bismo da će masa deuterija biti jednaka zbiru masa vodika i neutrona. Ukoliko uzmemo podatke o masama vodika i neutrona iz tablica i saberemo ih dobijamo $2,016490\ u$. Mjerenja pokazuju da je masa deuterija $2,014102\ u$ što daje razliku od $0,002388\ u$. "Nedostajuća" masa odgovara energiji koju treba uložiti kada želimo da rastavimo jezgru deuterija na nukleone odnosno energiji koja se oslobađa kada se ti nukleoni vežu u jezgru. Energetski ekvivalent nedostajuće mase je $2,224$ MeV. Ukoliko se izvrše eksperimenti koji nam mogu pokazati koliko energije je potrebno da se jezgra deuterija rastavi na sastavne dijelove, pokazuje se da je to upravo energija od $2,224$ MeV. Kada se uloži manje energije, nukleus deuterija opstaje, a kada se uloži više energije, on se troši na kinetičku energiju neutrona i protona nakon raspada.

U zavisnosti od veličine jezgre, raspon energija veze ide od 2 MeV za vodik do 1640 MeV za bizmut. Energija veze raste s brojem nukleona što je i logično jer kako dodajemo nove i nove nukleone, svaki od njih će odbaciti mali dio svoje mase te će i energija veze biti veća. Ukoliko energiju veze jezgre uporedimo sa energijom veze elektrona u atomu (energijom jonizacije) koja je nekoliko

eV možemo zaključiti da se ovdje radi o razlici od nekoliko redova veličine. Ova činjenica nam daje nagovještaj da su jezgre izvor velike količine energije koju možemo iskoristiti. Poznavanje energije veze nam ne može pomoći ukoliko želimo da znamo da li ćemo u procesu cijepanja teže jezgre na dvije lakše ili pak spajanja lakših u jednu težu jezgru dobiti više energije nego što smo uložili. Da bismo izračunali da li će nam cijepanje teške jezgre na dvije lakše dati energiju morali bismo jezgru rastaviti na nukleone, a zatim te nukleone spojiti u dvije lakše jezgre i izračunati njihove mase. Umjesto da se ovaj postupak vrši korak po korak, možemo se fokusirati samo na jedan nukleon i vidjeti koliko mu energije treba prosječno dati da bismo ga izvukli iz neke jezgre i koliko bi mu energije prosječno trebalo dati da bismo ga ugradili u neku drugu jezgru. Takva prosječna energija se zove **specifična energija veze** ili **energija veze po nukleonu** i označava se sa E/A, a dobija se kad energiju veze podijelimo s brojem nukleona za dati nuklid.

Razmotrićemo specifičnu energiju veze za jedan laki, srednji i teški nuklid respektivno. Energija veze za ${}^2_1$H je $2,2$ MeV, za ^{56}Fe je $492,8$ MeV, dok je za ^{235}U 1784 MeV. Najteži nuklid uran ima i najveću energiju veze. Međutim ako izračunamo njihove specifične energije veze dobijamo za ${}^2_1$H $1,1$ MeV, za ^{56}Fe $8,8$ MeV, a za ^{235}U $7,6$ MeV. Vidimo da iako je uran teži od željeza, željezo ima veću specifičnu energiju veze od urana. Možemo to predstaviti i grafički (slika 6.3).



Slika 6.3. *Specifična energija veze u zavisnosti od masenog broja.*

Pokazuje se da su željezo i elementi oko njega najstabilniji. Lakši elementi (kao npr. vodik) ili teži elementi (kao npr. uran) su nestabilniji i imaju manje energije veze po nukleonu. Ovo znači da su elementi i desno i lijevo od željeza podložni transformacijama u stabilnije elemente. Elementi sa lijeve strane su podložni fuziji-procesu u kojem se dvije lakše jezgre spajaju u težu, dok su elementi sa desne strane podložni fisiji-procesu u kome se teža jezgra raspada na lakše jezgre. U oba procesa se oslobađa velika količina energije o čemu će biti govora kasnije.

6.4 Radioaktivnost

Radioaktivnost je proces spontane transformacije jezgre pri čemu ona mijenja svoj sastav ili energetsko stanje uz emisiju čestica i energije. Proces radioaktivnog raspada će trajati sve dok se nestabilna, radioaktivna jezgra ne transformiše u stabilnu jezgru što se obično dešava kroz više koraka. Ovu pojavu je slučajno otkrio francuski fizičar Antoan Anri Bekerel (Antoine-Henri Becquerel) 1896. godine u spojevima koji sadrže uran. Zaključio je da se radioaktivno zračenje spontano emituje, da je prodorno, da zacrnjuje fotografsku emulziju i da jonizuje gasove. Sam naziv radioaktivnost predložila je 1898. godine Mari Kiri (Marie Curie) koja je zajedno sa svojim mužem Pjerom Kirijem (Pierr Curie) proučavajući radioaktivnost otkrila do tada dva nepoznata elementa - polonij i radij.

Radioaktivnost može biti *prirodna* i *vještačka*. Prirodna radioaktivnost je stalno prisutna oko nas i dolazi iz naše okoline. Prirodni izvori radioaktivnog zračenja su npr. radionuklidi koji se nalaze u hrani i vodi, dok su vještački npr. produkti nastali nuklearnim probama u atmosferi i nuklearni otpad. Radioaktivno zračenje spada u jonizirajuće zračenje jer na svom putu jonizira atome na koje nailazi. Pri prolasku kroz žive ćelije, jonizirajuće zračenje može izazvati različite vrste oštećenja. Posebno važna molekula koju jonizirajuće zračenje može oštetiti je dezoksiribonukleinska kiselina (DNK). Jonizirajuće zračenje ne možemo detektovati našim čulima, ali postoje različite vrste detektora gdje mjerenja možemo interpretirati na osnovu energije koju zračenje deponuje u materijalu detektora. Postoje zakonske regulative koje definišu dozu zračenja koju čovjek može da primi godišnje.

6.4.1 Zakon radioaktivnog raspada

Radioaktivni elementi se raspadaju na različite načine, ali mi ne možemo sa sigurnošću reći kada će do tog raspada doći. Prema tome možemo reći da je radioaktivni raspad statistički proces koji ne zavisi od vanjskih uslova. Svaka jezgra ima svoju vjerovatnoću raspada. Usvojeno je da se početna jezgra koja se raspada naziva *roditelj*, dok se novonastala jezgra naziva *potomak* ili *kćerka*.

Pretpostavićemo da imamo slučaj pri kojem se nestabilna jezgra A transformiše u stabilnu jezgru B. Neka je u vremenskom trenutku t prisutno N atoma radionuklida A. Brzina raspada tj. broj raspada u jedinici vremena može se dati odnosom:

$$\frac{dN}{dt}, \tag{6.10}$$

gdje je dN broj atoma koji se raspada u beskonačno malom vremenskom intervalu dt. Brzina raspada je proporcionalna ukupnom broju neraspadnutih atoma N što možemo napisati kao:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N. \tag{6.11}$$

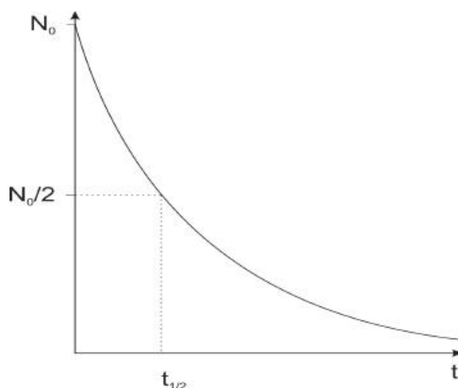
U jednačini (6.11) predzank "-" se pojavljuje zato što broj atoma N opada sa vremenom, a konstanta proporcionalnosti λ se zove *konstanta radioaktivnog raspada*. Transformisanjem jednačine (6.11) u oblik:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \tag{6.12}$$

te integracijom u granicama od $(0, t)$ i (N_0, N), dobija se:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{6.13}$$

U jednačini (6.13) N_0 je početni broj atoma elementa A, a N je broj neraspadnutih atoma elementa A nakon vremena t, a sama jednačina je **zakon radioaktivnog raspada**. Zakon radioaktivnog raspada je prikazan na slici 6.4.



Slika 6.4. *Zakon radioaktivnog raspada. Početni broj jezgara N_0 opada s vremenom po eksponencijalnom zakonu. Nakon vremena $t_{\frac{1}{2}}$ početni broj jezgara se smanjio za pola.*

Vrijednosti radioaktivne konstante λ određuju se uglavnom eksperimentalno i za neke atome se kreću od dijelova s^{-1} do nekoliko miliona s^{-1} za neke druge. Umjesto λ češće se kao karakteristika radioaktivnog raspada uzima tzv. *vrijeme ili period poluraspada*. To je vrijeme za koje se raspadne polovina od početnog broja atoma radioaktivnog elementa. Vrijeme poluraspada se označava sa $t_{\frac{1}{2}}$ ili $T_{\frac{1}{2}}$. Kad u jednačinu (6.13) uvrstimo za $t = t_{\frac{1}{2}}$ i za $N = \frac{N_0}{2}$, nakon sređivanja dobićemo da je:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \tag{6.14}$$

Može se još definisati i *srednje vrijeme života* radionuklida kao recipročna vrijednost radioaktivne konstante:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{ln2}. \tag{6.15}$$

Prema zakonu radioaktivnog raspada (6.13) brzina raspada je data derivacijom $\frac{dN}{dt}$. Apsolutna vrijednost te veličine prema (6.11) je:

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N \tag{6.16}$$

i naziva se *brzina radioaktivnog raspada, aktivnost ili radioaktivnost*. Prema (6.13) aktivnost eksponencijalno opada sa vremenom:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}, \tag{6.17}$$

gdje je A_0 početna aktivnost supstance, dok je A aktivnost supstance nakon vremena t. Jedinica za aktivnost u Međunarodnom sistemu jedinica je *Bekerel* u oznaci Bq. Aktivnost od jednog Bekerela je ona aktivnost pri kojoj se dešava jedan raspad jezgre u jednoj sekundi:

$$1 \text{ Bq} = 1 \ \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}. \tag{6.18}$$

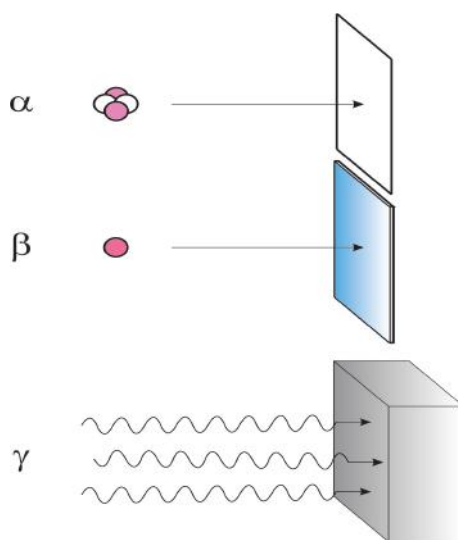
U ranijim sistemima su se još upotrebljavale jedinice $Kiri$ u oznaci Ci i $Raderford$ u oznaci Rd:

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \ \frac{\text{raspada}}{\text{s}} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \tag{6.19}$$

$$1 \text{ Rd} = 10^{6} \ \frac{\text{raspada}}{\text{s}} = 10^{6} \text{ Bq}. \tag{6.20}$$

6.4.2 Tipovi radioaktivnog raspada

Nedugo nakon otkrića radioaktivnosti otkrivena su tri osnovna tipa radioaktivnog raspada: α, β i γ raspad. Raderford je 1897. godine otkrio dva tipa radioaktivnog raspada, manje prodorno koje je nazvao α i više prodorno koje je nazvao β zračenje. 1900. godine francuski fizičar i hemičar, Pol Vilard (Paul Villard), je otkrio i treću vrstu radioaktivnog zračenja tzv. γ zračenje koje je bilo prodornije od prethodna dva tipa što se može vidjeti na slici 6.5. Da bi se α zračenje zaustavilo dovoljan je list papira, β zračenje može zaustaviti nekoliko mm debeo komad lima, dok najprodorinije γ zračenje zaustavlja nekoliko cm debela olovna ploča.



Slika 6.5. *Prodornost α, β i γ zračenja.*

Pri α i β raspadu dolazi do transforamcije polazne jezgre u novu uz emisiju odgovarajućih čestica i energije. Nakon radioaktivnog raspada jezgra može ostati u pobuđenom stanju i da bi se vratila u osnovno energetsko stanje emituje γ zračenje pri čemu ne dolazi do transmutacije elementa. Radioaktivnim

raspadom se može smatrati i spontana fisija koju doživljavaju neka teža jezgra poput ^{238}U o čemu će biti govora nešto kasnije. U radioaktivni raspad takođe spada i emisija protona i emisija teških dijelova jezgre. Tada dolazi do raspada teže jezgre na dvije manje jezgre uz emisiju odgovarajućih čestica i oslobađanje energije. U nastavku ćemo razmotriti tri najčešća tipa radioaktivnog raspada: α, β i γ.

1. *α raspad*

   Sve teže jezgre sa $Z{>}82$ pokazuju određenu nestabilnost i spontanu dezintegraciju. Mnoge od njih se dezintegrišu tako da se razdvajaju na novu jezgru i jezgru helijevog atoma $^4_2$He tj. α česticu. Ovaj tip raspada općenito možemo predstaviti kao



$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \tag{6.21}$$

   Vidimo da pri α raspadu nastaje nova jezgra i α čestica. Pri tome je A novonastale jezgre manji za četiri, dok je$Z$ manji za 2 u odnosu na prvobitnu jezgru. Vrijede zakoni održanja naelektrisanja i broja nukleona tj. Z i A početne jezgre na desnoj strani mora biti isti kao i zbir Z i A novonastalih jezgara na lijevoj strani. Primjer α raspada je:



$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \tag{6.22}$$

   Registrovano je oko 300 emitera α čestica pri čemu se emituju energije u rasponu 4-10 MeV.

2. *β raspad*

   β raspad je najčešći oblik spontane transformacije jezgre. Prilikom β raspada promjeni se naelektrisanje jezgre Z, dok broj nukleona A ostaje isti. Pri tome se emituju β^+ i β^- čestice (elektroni i pozitroni). Svaka čestica ima svoju antičesticu. Tako je pozitron antičestica elektronu. Pozitron ima iste osobine kao i elektron, osim što mu je predznak naboja pozitivan. Nakon otkrića β raspada postojao je veliki problem u tačnom opisivanju ovog procesa. Naime, izgledalo je da je zakon očuvanja energije narušen što fizikalno nije imalo smisla. Činilo se da jedan dio energije "nestaje" u ovom procesu. Kasnije je otkrivena čestica pod nazivom elektronski neutrino, kao i njena antičestica, elektronski antineutrino za koje se pokazalo da također nastaju u ovim transformacijama jezgri i pri tome sa sobom odnose dio "nedostajuće" energije. Postoje tri tipa β raspada: β^-, β^+ i zahvat elektrona.

   β^- raspad

   Ovu vrstu raspada možemo općenito predstaviti kao:



$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{\ \ A}\mathrm{Y} + {}^{\ 0}_{-1}\mathrm{e} + \tilde{\nu}. \tag{6.23}$$

Pri β^- raspadu nastaje nova jezgra čiji je redni broj veći za jedan, elektron i elektronski antineutrino. Pri ovoj transformaciji jedan neutron iz jezgre se transformiše u proton što možemo predstaviti kao:



$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + e^- + \tilde{\nu}. \tag{6.24}$$

β^+ raspad

Ovu vrstu raspada možemo općenito predstaviti kao:



$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{\ \ A}\mathrm{Y} + {}^{\ 0}_{+1}\mathrm{e} + \nu. \tag{6.25}$$

Pri ovoj vrsti raspada nastaje nova jezgra čiji je redni broj manji za jedan, pozitron i elektronski neutrino. Pri ovoj transformaciji jedan proton iz jezgre se transformiše u neutron što možemo predstaviti kao:



$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + e^+ + \nu. \tag{6.26}$$

Zahvat elektrona

Može se desiti da jezgra zahvati elektron iz najbliže, K-ljuske pri čemu se jedan proton transformiše u neutron uz emisiju neutrina. Zato se ovaj proces često zove i K-zahvat. Ovaj proces možemo prikazati kao:



$${}^{\ 0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{\ \ A}\mathrm{Y} + \nu. \tag{6.27}$$

Ispostavilo se da je β raspad puno komplikovanije opisati nego α raspad. Prilikom α raspada nastaje α čestica koja se sastoji od nukleona koji su već prisutni u jezgri, dok prilikom β raspada dolazi do transformacije nukleona iz jednog u drugi. Također smo mogli primijetiti da prilikom β raspada jezgra emituje elektron ili pozitron pa je možda zbunjujuće otkud ove čestice u jezgri kad znamo da nisu u njenom sastavu. Transformacije nukleona u jezgri i stvaranje novih čestica opisuje se veoma kompleksnom teorijom - kvantnom teorijom polja. Što se tiče elektrona i pozitrona, isto kao što ni foton ne postoji u atomu, nego nastaje prilikom povratka atoma sa pobuđenog u niže energetsko stanje, tako i pozitron i elektron nisu prisutni u jezgri, već nastaju prilikom procesa transformacije nukleona tokom samog β raspada.

3. *γ raspad*

γ zračenje je prodorno elektromagnetno zračenje najkraće talasne dužine pa prema tome i najveće energije. Nakon α i β raspada često novonastala jezgra ostaje u pobuđenom stanju i prilikom povratka u niže energetsko stanje emituje γ zračenje. Ovo se može prikazati kao:

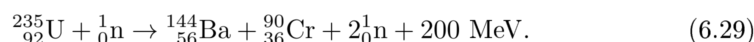


$${}^{A}_{Z}\mathrm{X}^* \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma, \tag{6.28}$$

gdje $*$ označava da je jezgra u pobuđenom stanju.

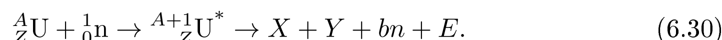
6.5 Fisija

Kada smo govorili o energiji veze zaključili smo da se u atomskoj jezgri nalazi velika količina energije koja bi se mogla iskoristiti. Jedan od načina da se energija dobije iz jezgre je fisija. 1938. godine Oto Han (Otto Hahn), Lize Majtner (Lise Meitner) i Fric Štrasman (Fritz Strassmann) su ostvarili nuklearnu reakciju u kojoj su bombardovali izotop $^{235}_{92}\mathrm{U}$ neutronima. Pod pojmom nuklearne reakcije podrazumijevamo proces transformacije jezgre usljed razmjene energije sa drugim jezgrama ili elementarnim česticama. Kao rezultat ove reakcije Han i Štrasman su dobijali po dvije nove jezgre čiji su atomski brojeve negdje oko sredine periodnog sistema, nekoliko novih neutrona i oslobođenu energiju od oko 200 MeV:



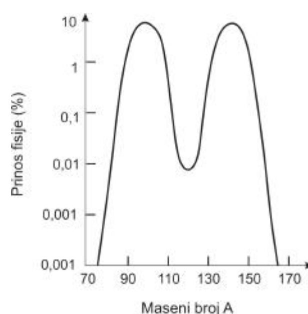
$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{90}_{36}\mathrm{Cr} + 2{}^{1}_{0}\mathrm{n} + 200\ \mathrm{MeV}. \tag{6.29}$$

Ovakva pojava cijepanja teže jezgre na dva približno jednaka fragmenta naziva se **nuklearna fisija**. Danas su poznata dva tipa fisije: spontana fisija i prinudna (vještačka) ili nuklearna fisija. Kao što i samo ime govori, spontana fisija dešava se bez ikakvih vanjskih uticaja, spontano, dok je sam proces sličan onom kod vještačke fisije. Spontana fisija se dešava samo kod najtežih jezgara tzv. transurana ($Z \geq 90$, $A > 230$). Cijepanje jezgre u opštem obliku možemo napisati kao:



$$^{A}_{Z}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{A+1}_{Z}\mathrm{U}^{*} \rightarrow X + Y + bn + E. \tag{6.30}$$

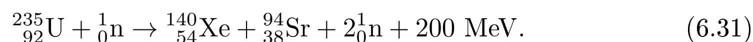
Iz jednačine (6.30) se vidi mehanizam fisije. Teška jezgra se bombarduje neutronima koji se nazivaju "spori" ili "termalni" neutroni jer je njihova brzina približno jednaka brzini termičkog kretanja molekula (oko 0,025 eV). Kada se termalni neutron sudari sa jezgrom $^{A}_{Z}\mathrm{U}$, doći će do zahvata neutrona i nastaće pobuđena jezgra $^{A+1}_{Z}\mathrm{U}^{*}$ čiji je maseni broj veći za 1 od polazne jezgre. Novonastala jezgra se mora osloboditi viška energije E pri čemu nastaju dva nova elementa X i Y - fragmenti fisije, te u prosjeku b neutrona koji se u ovom procesu oslobode.



Slika 6.6. *Prinos fisije u zavisnosti od atomskog broja.*

Fisija se može ostvariti i procesom bombardovanja teške jezgre protonima, α česticama ili drugim naelektrisanim česticama, ali najinteresantniji je proces fisije koji se dobije bombardovanjem teške jezgre neutronima. Istraživanja nuklearne fisije pokazala su da postoji više načina cijepanja teže jezgre, npr. moguć

je i ovakav proces fisije:

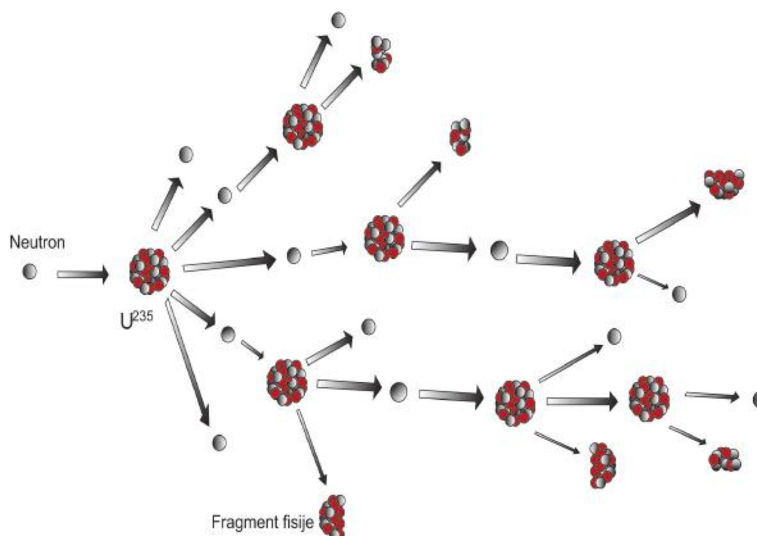


$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2{}^{1}_{0}\mathrm{n} + 200 \text{ MeV}. \quad (6.31) $$

Treba napomenuti da je u jednačinama (6.29) i (6.31) izostavljeno pisanje koraka gdje dolazi do formiranja pobuđene jezgre urana. Pokazalo se da su najvjerovatnija cijepanja ona pri kojima se mase produkata odnose kao 2:3.

Na slici 6.6 je prikazana raspodjela masenih brojeva fragmenata fisije ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Kao što se vidi sa slike, samo u $0,01\%$ slučajeva će nastati fragmenti iste mase. Najvjerovatniji tj. najčešći produkti fisije su nizovi koji imaju fragmente sa atomskim masama oko 95 i 140. Primarni fragmenti fisije imaju višak neutrona koji se oslobađaju u nizu β^- reakcija.

Osim što se u procesu fisije oslobađa velika količina energije, ona je pogodna kao izvor energije jer se u tom procesu u prosjeku oslobađa $2,5$ novih neutrona koji mogu prouzrokovati dalje fisije što je prikazano na slici 6.7.



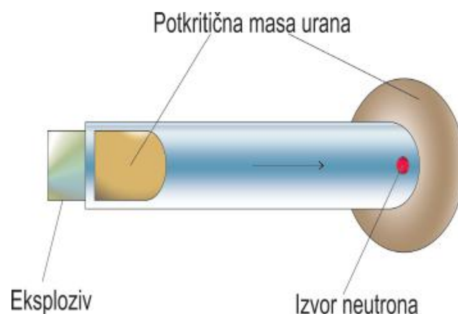
Slika 6.7. *Šematski prikaz lančane reakcije fisije*

Ovaj proces se zove *lančana rekacija* koja može biti *kontrolisana* ili *nekontrolisana*. Kontrolisane lančane reakcije se postižu u nuklearnim reaktorima, dok se nekontrolisane reakcije postižu u nuklearnim bombama.

Prvi uslov za postizanje kontrolisane reakcije fisije je da obezbijedimo nuklearno gorivo. U prirodnoj rudi urana prisutano je samo oko $0,7\%$ ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ koji je pogodan za fisiju dok ostatak čini ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Da bi se odvijala kontrolisana lančana reakcija prvo je potrebno "obogatiti" rudu urana tj. povećati procenat ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ sa $0,7\%$ na nekoliko procenata (obično 3%). Da bi se reakcija održavala konstantnom broj neutrona mora biti stalan. To se obično postiže posebnom konstrukcijom nuklearnog reaktora velike zapremine čime se spriječava da neutroni pobjegnu iz reaktora. Osim toga, neutroni nastali fisijom su tzv. "brzi" neutroni čija je energija oko 2 MeV. Za fisiju su pogodni "spori" ili "termalni" neutroni pa im je potrebno smanjiti energije do $0,04$ eV. Ovaj proces poznat pod nazivom termalizacija ili usporavanje neutrona postiže se u supstancama koje se zovu *moderatori* gdje ne dolazi do apsorpcije neutrona već samo do smanjivanja

njihove energije. Postoji više vrsta moderatora, a najpoznatiji moderator je teška voda (deuterij kroz koji se propušta vodik). Moderatori i nuklearno gorivo se u reaktoru slažu naizmjenično jer ponekad, ako jezgra zahvati neutron, ne mora nastupiti fisija nego emisija γ fotona. Prilikom procesa termalizacije, neutron je naročito podložan nefisionom zahvatu od strane $^{238}_{92}$U u području energija od 100 eV do 1 eV. Naizmjeničnim slaganjem goriva i moderatora izbjegava se da u području kritičnih energija nastupi γ emisija umjesto fisije.

Što se tiče nekontrolisane nuklearne lančane reakcije fisije, ona se dešava unutar nuklearne bombe. Na slici 6.8 je prikazan princip rada jednog tipa nuklearne bombe.



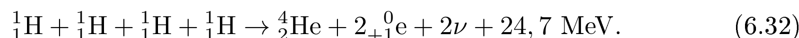
Slika 6.8. *Šematski prikaz mehanizma atomske bombe.*

Hemijskim eksplozivom se potiskuje podkritična masa $^{235}_{92}$U prema desnoj strani gdje se kombinuje sa drugom potkritičnom masom čime se dobija odgovarajuća količina materijala za odvijanje lančane reakcije koja se više ne može kontrolisati. Prva nuklearna eksplozija se desila 1945. godine kada je izveden tzv. Triniti (Trinity) test u Novom Meksiku u Sjedninjenim Američkim Državama. Nakon ovog testa nuklearna bomba je bačena na japanski grad Hirošimu 6.avgusta 1945. godine, a tri dana nakon toga i na Nagasaki. Na razvoju nuklearnog oružja u okviru projekta Menhetn (Manhattan) radio je Robert Openhajmer (Julius Robert Oppenheimer), američki teorijski fizičar i profesor fizike na Univerzitetu u Berkliju (Berkeley). Korištenje nuklearnog naoružanja predstavlja i danas moralno pitanje jer su žrtve bile nevini ljudi, a posljedice ove dvije eksplozije osjećaju se još i danas.

6.6 Fuzija

Nuklearna fuzija je reakcija spajanja dvije manje jezgre u jednu težu uz oslobađanje energije. Spajanje lakših u teže jezgre traje od postanka Svemira. U vrijeme Velikog praska nije bilo atoma već je Svemir bio jako gust, vruć i počeo je brzo da se širi. Kada je počeo da se hladi to je omogućilo energiji da se pretvori u razne subatomske čestice uključujući protone, neutrone i elektrone. Jednostavna jezgra su se formirala već nakon tri minute od Velikog praska, a puno kasnije su se formirali neutralni atomi, zvijezde, planete itd. Na Zemlji skoro svu energiju dobijamo od Sunca (nafta, ugalj, energija vjetra, vode....) pa se postavlja pitanje odakle Suncu energija. Unutar Sunca vladaju visoke temperature od oko 1,5$\cdot 10^7$ K gdje se čestice kreću velikim brzinama i stalno se sudaraju. Usljed toga u unutrašnjosti Sunca vlada stanje plazme tj. gasa jona

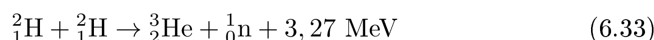
(jezgara) čiji su se svi orbitalni elektroni oslobodili. U ovakvim uslovima visoke temperature odvijaju se reakcije spajanja jezgara - fuzije. Spektroskopska mjerenja koja su ranije pomenuta u ovoj knjizi mogu nam dati informacije o tome koji se elementi nalaze u zvijezdama poput našeg Sunca (linijski spektri). Tako možemo otkriti prisustvo vodika, helija i drugih težih elemenata u malom procentu. U našem Suncu je zastupljen tzv. protonski ciklus koji se može opisati sljedećom relacijom:



$$ {}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2\,{}_{+1}^{0}\mathrm{e} + 2\nu + 24,7\ \mathrm{MeV}. \qquad (6.32) $$

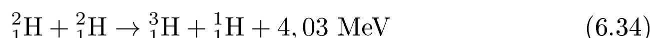
U konačnici kad se iscrpe sve zalihe vodika Sunce će kroz transformacije karakteristične za zvijezde te veličine (crveni džin, a zatim i bijeli patuljak) da doživi svoju smrt. Postavilo se pitanje da li se ovakvi procesi mogu dešavati na Zemlji. Kao i fisija i reakcija fuzije može biti kontrolisana ili nekontrolisana. Prva nekontrolisana reakcija fuzije na Zemlji se desila 1952. godine kada su Sjedinjene Američke Države detonirale nuklearnu (hidrogensku) bombu kodnog imena Ajvi Majk (Ivy Mike). Kontrolisana fuzija bi predstavljala veliki izvor energije, ali zbog niza tehničkih teškoća još nije realizovana na Zemlji. U laboratorijskim uslovima ostvarene su fuzione reakcije tipa:

1. deuterij-deuterij



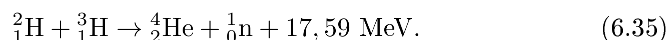
$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + {}_0^1\mathrm{n} + 3,27\ \mathrm{MeV} \qquad (6.33) $$

2. deuterij-deuterij



$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_1^3\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} + 4,03\ \mathrm{MeV} \qquad (6.34) $$

3. deuterij-tricij



$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1\mathrm{n} + 17,59\ \mathrm{MeV}. \qquad (6.35) $$

Deuterij je dosta zastupljen u morskoj vodi što ga čini gotovo neograničenom sirovinom. Da bi se fuzija mogla odvijati kontinuirano moraju biti zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. visoka temperatura T

   Ona je potrebna radi svladavanja Kulonove odbojne sile između pozitivnih jezgri jer je materija u stanju plazme.

2. velika gustoća jona n

   Broj jona u plazmi mora biti veliki da bi češće dolazilo do sudara.

3. dugo vrijeme konfiniranja τ

   Osnovni problem je kako održati plazmu unutar nekog spremnika duže vrijeme na odgovarajućoj temperaturi i sa odgovarajućom gustoćom. Ni jedan materijal na Zemlji ne može izdržati visoke temperature potrebne za fuziju.

Lovson (J. D. Lawson) je uspostavio tzv. Lovsonov kriteriji koji nam govori da ako želimo imati uspješan termonuklearni reaktor, moramo postići da je:

$$n \cdot \tau \geq 10^{20} \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}. \tag{6.36}$$

Da bi se dobila kontrolisana reakcija fuzije potrebno je držati plazmu potpuno odvojenu od zidova posude. Jedan način za to je korištenje magnetnih polja. Uređaj koji radi na tom principu zove se tokamak i koristi kombinaciju toroidalnog i poloidalnog magnetnog polja. Drugi način konfiniranja je tzv. interno konfiniranje, gdje se zrakama visoke energije zagrijavaju i kompresuju male palete deuterij-tricija. U suštini, dobivaju se mini ekspolozije hidrogenskih bombi koje omogućavaju stalan dotok energije. Najviše pažnje za interno konfiniranje je poklonjeno laserskim zrakama, ali obećavajuće su i protonske i elektronske zrake. Trenutno je jedan od najambicioznijih projekata za dobivanje kontrolisane fuzije tzv. Međunarodni termonuklearni eksperimentalni reaktor (International Thermonuclear Experimental Reactor-ITER). Kroz saradnju 35 zemalja u južnoj Francuskoj se gradi najveći eksperimentalni tokamak u cilju ostvarivanja kontrolisane fuzije kao budućeg neograničenog izvora energije.

Literatura

1. D. M. Ivanović, V. M. Vučić, "Fizika II elektromagnetika i optika", Naučna knjiga, Beograd 1967.

2. S. Marić, “Fizika”, Svjetlost, Sarajevo, 2001.

3. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, “Fundamenatls of Physics”, John Wiley and Sons, New York, 2001.

4. E. Hadžiselimović, "Osnovi termodinamike i molekularne fizike", Bosnia Ars, Tuzla, 2005.

5. N. Tanović, L. Tanović, "Fizika Osnove atomske i nuklearne fizike", Uniprint, Sarajevo, 1991.

6. H. G. J. Moseley, “The High-Frequency Spectra of the Elements, Part II,” Philosophical Magazine 27: 709, 1914.

7. A. Beiser, "Concepts of Modern Physics", McGraw-Hill Inc., New York, 1995.

8. J. Crepeau, "A Brief History of the T^4 Radiation Law", Heat Transfer Summer Conference, Proceedings, July 19–23, 2009 San Francisco, California, USA, https://doi.org/10.1115/HT2009-88060.